２次元正方格子上の接触感染

石橋善弘[1]　　　　福井稔[2]

[1]名古屋大学　　　　[2]中日本自動車短期大学

概要

２次元系正方格子上での接触感染について、蔓延状態から感染率がさがるときの感染消滅に至る過程をセル・オートマトン模型を用いて調べた。本モデルでは感染率 λ（λ は 1 単位時間内に感染事象が何回発生するかを示す。たとえばλ =1.65）のかわりに感染確率 r =1- exp (-λ)を用いた（r は 1 単位時間の間に感染事象が 1 回以上生じる確率）。感染確率 r が 1 より小さいとき感染濃度 Q の平衡感染状態がえられるが、特定の感染確率 $\boldsymbol{r}_\mathbf{c}$ よりも小さくなると感染が消滅する（この $\boldsymbol{r}_\mathbf{c}$ を臨界感染確率とよぶ）。治癒期間 V を 1 だけではなく、2, 3, 4, 5, 10 としたときの平衡感染状態も調べた。すでにえられている 1 次元系における結果と比較検討する。

The Contact Infection on the Two-dimensional Square Lattice

Yoshihiro Ishibashi[1] , Minoru Fukui[2]

[1]Nagoya University　[2]Nakanihon Automotive College

Abstract

By means of a cell automaton (CA) model the contact infection on the two-dimensional square lattice has been studied. Instead of the infection rate λ, which implies how many times the event of infection takes place in one unit time, the infection probability r =1- exp (-λ) is adopted, which implies the probability that the event of infection takes place more than once when one unit time has passed. When r is less than 1, the equilibrium infection states of the density Q are attained, while r is less than a certain $\boldsymbol{r}_\mathbf{c}$, defined as the critical infection probability, the infection states disappear. Not only the case of the healing period 1, but also those of the healing period 2, 3, 4, 5, 10 were studied. Results obtained will be discussed by comparing with those obtained for a one-dimensional system.

1. まえがき

接触感染について、1 個の感染源から感染が広がるための臨界感染率 λ_c を求めた研究

は多く、自然治癒率を１としたとき、臨界感染率 λ_c は１次元、２次元でそれぞれ、λ_c=1.65, 0.4119 と知られている。[1, 2]　他方、蔓延状態から感染率がさがるときの感染消滅に至る過程の研究は少ないらしい。そこで、我々は空間・時間とも離散化したセル・オートマトン・モデルに基づく simulation により、昨年の１次元系に引きつづき、今年は２次元正方格子上における感染消滅や平衡感染状態を調べた。

2. 感染率と感染確率および治癒率と治癒期間

いま、感染率（１単位期間の間に感染事象が何回発生するか）をλ（たとえばλ=1.65）とする（この事象は滅多に起こらない事象であり、ポアソン分布に従うとする）。すると１単位期間を経過したときに、この事象が１回以上起こる確率 r は　r =1- exp(-λ)で与えられる。本稿ではこの r を感染確率とよぶ。

また、治癒率（通常は１としている）の代わりに治癒期間 Vを設定する。これは期間 V 経過後は全員治癒した状態になることを意味する（逆に期間 V の間は治癒せず、感染源となる）。本研究では simulation の簡便化のため、感染確率 $\boldsymbol{r}$ と治癒期間 Vを用いる。

3.　シミュレーション

２次元正方格子上の接触感染を考える。治癒期間 (感染後治癒するまでの期間) V=１, r=1 のとき、感染濃度 Q = 1 /2 (=V/(V+1)) の平衡状態が得られる（図 1)。

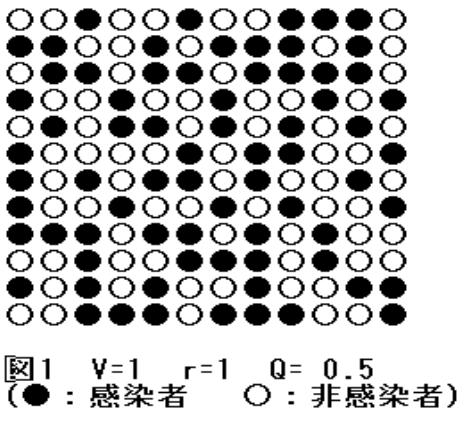


図 1.　V=1, r =1 のときの平衡状態。平衡感染濃度は 0.5.
黒丸は感染状態、白丸は治癒(非感染)状態をあらわす。

この状態から感染確率 r を小さくすると、各 r に依存した平衡濃度がえられる。また、臨界感染確率 $\boldsymbol{r}_c$ 以下では、感染が消滅した平衡濃度 0 の状態に相転移する。

次に、治癒に時間がかかるケース、すなわち V=1 ではなく、V = 2, 3, 4, 5, 10 について同様の simulation を行った。結果を図 2 に示す（図が煩雑になることを避けるため V =1, 2, 5, 10 の場合のみを示している）。同一 V について右下側が 1 次元系、左上側が 2 次元正方格子での結果を示しているが、2 次元正方格子では最近接格子点の数がより多いので臨界感染確率がより低くなるのは当然である。

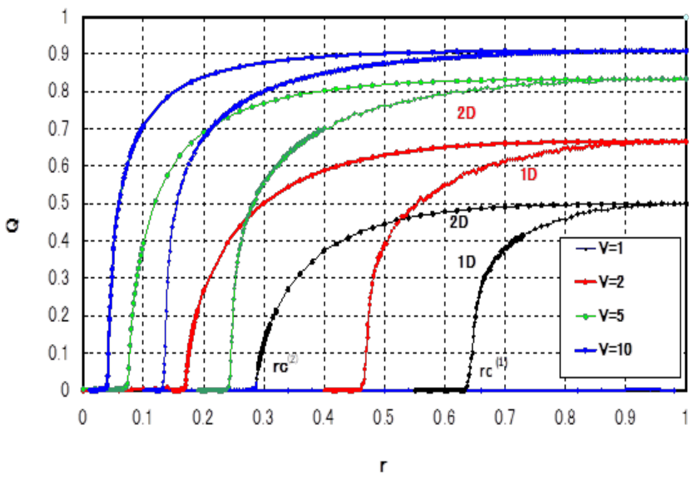


図 2. 感染確率 r と平衡感染濃度 Q .

同一 V について右下側が 1 次元系、左上側が 2 次元正方格子での結果。

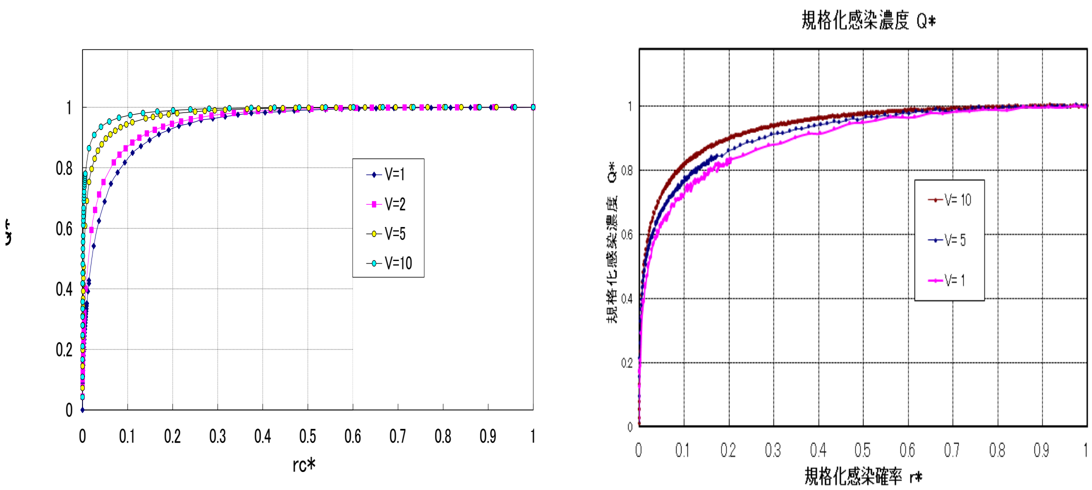
4. 結果と考察

図 2 からもわかるように、ここで考察したモデルはある種の相転移のモデルになっているようだ。特に注目すべき臨界感染確率 r_c は、V=1, 2, 5, 10 に対して r_c = 0.28 (0.64), 0.17 (0.46), 0.07 (0.24), 0.04 (0.13)となっている（括弧内は 1 次元系の r_c)。いずれも 2 次元系では 1 次元系に比べてより小さい数値が得られているが、各格子点あたりの最近接格子点の数が前者の方が大きい（より感染し易い）のであるから当然である。しかし、臨界感染確率 r_c そのものの導出法は未だ不明である。上に示した（図 2 からも読み取る事が出来る）r_c と V の関係は、2 次元系では $1 / r_c = 2.44\ V + 0.99$ となっている（1 次元系では $1 / r_c = 0.65\ V + 0.85$）。$1/ r_c$ がきれいな直線にのるが、直線の表式にあらわれる数値の意味は不明である。

また、感染濃度 Q を（V +1）/ V 倍し、感染確率 r を $r^* =(r - r_c)/(1- r_c)$ と規格化すると、図 3 が得られる。1 次元系にくらべて 2 次元正方格子における曲線が左上側に若干角張っている様にみえるが、本質的な特徴かどうかは不明である。

結論として、独自の接触感染モデルにより、臨界感染確率 r_c の治癒期間 V 依存性お

よび平衡感染濃度 Q の感染確率 r 依存性が定量的に得られた。しかし、参考とすべき臨界感染率 λ_c（まえがき参照のこと：1 次元、2 次元でそれぞれ、λ_c=1.65, 0.4119）の理論的根拠が明確にされていない現状では、特に r_c の V 依存性についての立ち入った議論は控えざるを得ない。他方、2 次元三角格子、六方格子などで同様のシミュレーションを行なえば、最近接格子点の数と r_c の関係について何らかの新しい知見がえられるだろうし、実際そのようなシミュレーションを計画している。



（a）2 次元正方格子　　　　(b) 1 次元格子

図 3　規格化感染確率 r*と規格化平衡感染濃度 Q*の関係。

最後に、査読者に本課題と類似の問題を平均場近似により取り扱った 2 編の論文を紹介していただいたことを付記したい。ただし、その内容については慎重に検討すべきであり、本稿との安易な対比はさけたいので、それら 2 編の論文は参考文献として示すにとどめる（参考文献 3 および 4)。いずれにしろ、拙稿を丁寧に査読していただいた査読者に感謝する。

参考文献

1）今野紀雄「確率モデルって何だろう」（ダイヤモンド社）

2）香取眞理「複雑系を解く確率モデル」（Blue Backs, 講談社）

3）M.E.J. Newman, Phys. Rev. E**66**, 016128 (2002).

4）L. Pellis, F. Ball, and P. Trapman, Math. Biosci. **235**, 85-97 (2012).