

# 走化性斥力作用系における被覆時間

大澤智興<sup>1</sup>

<sup>1</sup>九州工業大学大学院情報工学研究系

## 概要

被覆時間 (cover time, CT) は未知環境の探索性能の指標である。本研究では、自己放出分子の拡散・減衰で形成される濃度場に対し、負の走化性で確率的に応答するエージェントの数理モデルを用い、二次元格子で CT に対するエージェント数の影響を評価した。比較として斥力を持たないランダムウォーク (RW) を基準とした。RW・走化性系の双方で、エージェント数  $N$  の増加に伴い CT は概ね  $1/N$  に比例して短縮した。さらに、走化性系は斥力により探索の重複を抑制し、RW より短い CT を達成した。この走化性系に確率的最適制御を適用した場合、温度パラメタに応じて、RW と走化性斥力作用系を連続的に橋渡しする探索方策が得られ、探索効率を制御できることを示した。

## Cover Time in a Chemotactic Agent System with Repulsive Interactions

Chikoo Oosawa<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Graduate School of Computer Science and Systems Engineering, Kyushu Institute of Technology

## Abstract

We study cover time (CT)—an index of exploration performance in unknown environments—using a mathematical model of agents that exhibit repulsive chemotaxis in a concentration field formed by diffusion and decay of self-secreted molecules. On a two-dimensional lattice, we evaluate how the number of agents affects CT, using random walkers (RW) as a baseline. In both RW and chemotactic systems, CT decreases approximately in proportion to  $1/N$  as the number of agents  $N$  increases. Moreover, owing to repulsion, the chemotactic system suppresses redundant revisits to already-visited sites and thus achieves a shorter CT than RW. By further applying a stochastic optimal control to this chemotactic system, we demonstrate that, as the temperature parameter is varied, the exploration policy continuously bridges between the RW and the repulsive chemotactic regime, thereby enabling systematic control of exploration efficiency.

## 1 1 はじめに

被覆時間 (cover time, CT) は、未知環境を「どれだけ効率よくくまなく探索できるか」を評価する指標であり、免疫細胞による病原体探索や動物の採餌行動といった生物学的プロセスから、自動掃除機・巡回ロボット・センサネットワークにおけるパトロー

ル問題まで、幅広い応用をもつ探索性能指標として注目されている [1, 2]。

本研究では、自己放出分子の拡散・減衰で形成される濃度場に対し、負の走化性 (斥力) で確率的に応答する走化性エージェント系を用いて、二次元格子上の CT を評価する。ここでの多体探索は、エー

エージェント同士が明示的に通信して協調するのではなく、濃度場（環境）を介した相互作用によって探索の重複を抑制するという、環境を媒介とする協調として実現される。

具体的には、斥力をもたないランダムウォーク (RW) を基準としてエージェント数が CT に与える影響を比較するとともに、KL 正則化付き確率的最適制御を導入し、温度パラメタに応じて RW と走化性斥力作用系を連続的に橋渡しする探索方策を与える。このような自己駆動粒子系は、時空パターン形成や自然計算の計算資源としても注目されている [3, 4, 5, 6, 7]。

なお、自己生成場に応答する走化性エージェントの運動は、自己相互作用および履歴依存性（非マルコフ性）を伴うため、通常のブラウン運動とは異なる拡散統計（異常拡散）と密接に関係し得る。実際、著者の先行研究において平均二乗変位の時間スケリングが通常拡散から逸脱する例を示しており [8]、異常拡散の一般的背景と理論的枠組みについては総説を参照されたい [9]。

## 2 走化性モデル

負の走化性として斥力作用を実装するための移動ルールは、動的フロアフィールドモデル [10, 11] に基づき、濃度場の更新 (式 (1)) と、移動確率 (式 (2)) で与える。

$$I_{t+1}(\mathbf{r}) = (1 - \delta) \left[ (1 - \alpha) I_t(\mathbf{r}) + \frac{\alpha}{4} \sum_{\mathbf{u} \in \mathcal{N}_4(\mathbf{r})} I_t(\mathbf{u}) \right] + f_p \sum_{a=1}^N \Delta_{\mathbf{r}, \mathbf{r}_a(t)} \quad (1)$$

ここで、 $I_t(\cdot)$  は、 $t$  における化学物質の局所濃度、化学物質の  $\alpha$  は拡散率、 $\delta$  は減衰率、 $f_p$  はエージェントから放出される化学物質の量 ( $f_p > 0$ ) を示し、 $\Delta_{i,j}$  は、Kronecker のデルタである。 $\mathbf{r}_a(t)$  は、 $t$  におけるエージェントの位置を示し、 $N$  は、エージェント数である。 $\mathcal{N}_4(\mathbf{r}_a(t))$  は、 $t$  におけるエージェント位置  $\mathbf{r}_a(t)$  のノイマン近傍セル集合である。移動確率  $P$  は、式 (2) に示すように、ソフトマックス関数を用いて記述され、濃度場  $I_t(\cdot)$  と選好性  $k$  の両方に依存する。

$$P(\mathbf{r}'; t+1 | \mathbf{r}_a; t) = \frac{\exp[k I_t(\mathbf{r}')] }{\sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{N}_4(\mathbf{r}_a(t))} \exp[k I_t(\mathbf{s})]} \quad (2)$$

ただし、移動先の  $\mathbf{r}' \in \mathcal{N}_4(\mathbf{r}_a(t))$  である。 $k < 0$  では、 $I_t(\cdot)$  からの斥力作用となり、 $k = 0$  では、RW

となる。従って本モデルは、濃度場  $I_t(\cdot)$  の時空変化の原因をエージェント自身が作り出し、それに応じてエージェントが確率的に移動する。

## 3 確率的最適化

ここで、[11] に追加して、Kullback-Leibler (KL) 制御付で、 $I_t(\cdot)$  に依存する自己回避方策 (付録参照, [12, 13, 14]) を適用すると、移動確率  $P_{\text{KL}}(\mathbf{r}' | \mathbf{r})$  は、

$$P_{\text{KL}}(\mathbf{r}'; t+1 | \mathbf{r}_a; t) = \frac{p_0(\mathbf{r}' | \mathbf{r}_a) \exp\left[\frac{k_{\text{KL}}}{\lambda} I_t(\mathbf{r}')\right]}{\sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{N}_4(\mathbf{r}_a(t))} p_0(\mathbf{s} | \mathbf{r}_a) \exp\left[\frac{k_{\text{KL}}}{\lambda} I_t(\mathbf{s})\right]} \quad (3)$$

となる。 $k_{\text{KL}} < 0$  の場合は、式 (2) と同様に斥力となる。 $p_0(\mathbf{r}' | \mathbf{r})$  は、RW とした。 $\lambda$  は、温度に対応する。これが大きい場合は RW に近づき、小さい場合は、自己回避方策が優位になる。

## 4 計算条件

初期濃度  $I_0 = 0$  の  $L \times L$  正方格子の周期境界条件を課す。エージェントの初期位置はランダムに設定した。 $L, N$  や  $\lambda$  を変えながら、100 回試行した。CT (全ての格子点がいずれかのエージェントによって 1 回以上訪問されるまでの所要ステップ数) を計測し、100 回の平均値を求めた。ただしエージェント間には、排除体積効果を考慮した [11]。さらに走化性系には、 $\alpha = 0.5$ 、 $\delta = 0.1$ 、 $f_p = 5.0$ 、 $k = k_{\text{KL}} = -20.0$  を使用した [11]。

## 5 結果と考察

単一の RW による  $L$  に対する CT の期待値  $\mathbb{E}[\tau_{\text{ct}}]$  は、式 (4) で与えられる [1]。図 1 に、式 (4) と対応する計算結果を示す。

$$\mathbb{E}[\tau_{\text{ct}}] = \frac{4}{\pi} L^2 (\log L)^2 \quad (L \rightarrow \infty) \quad (4)$$

図 2 に、CT の  $N$  依存性を示す。RW・走化性系の双方で、エージェント数  $N$  の増加に伴い CT は概ね  $1/N$  に比例して短縮した。走化性系のほうが、 $I_t(\cdot)$  を利用して重複訪問を抑制することで CT を短縮できるため、RW よりも短い CT を得られたと考えられる。

式 (3) を用いた場合の  $\lambda$  依存性を図 3 に示す。小さい  $N$  では、下に凸の依存性を示したが、大きい  $N$  では、シグモイド型の依存性を示した。大きい  $\lambda$

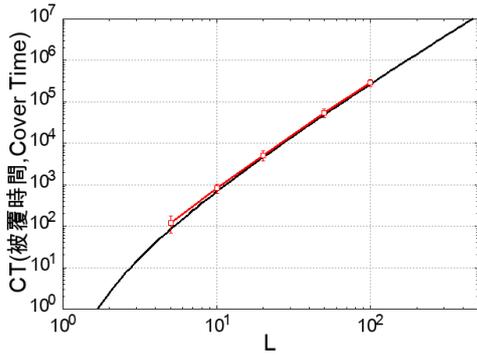


図1: 単一 RW による CT の  $L$  依存性 (両対数プロット)、横軸: $L$ 、縦軸:CT、赤: 計算結果 (平均±標準偏差)、 $5 \leq L \leq 100$ 、黒実線: 式 (4) の関係を示す。

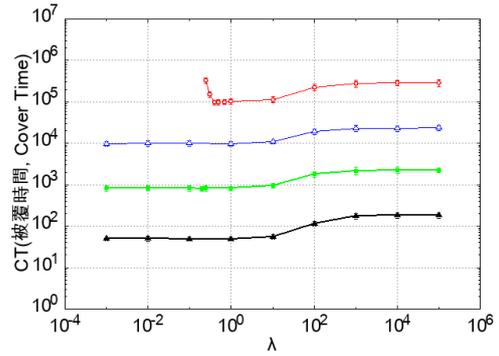


図3: CT の走化性エージェント系における  $\lambda$  依存性 (両対数プロット)、横軸: $\lambda$ 、縦軸:CT、上から赤: $N = 10^0$ 、青: $N = 10^1$ 、緑: $N = 10^2$ 、黒: $N = 10^3$  を示す。ただし、平均±標準偏差、 $L = 100$  である。

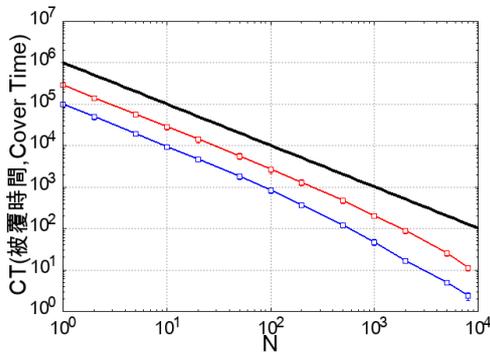


図2: CT のエージェント数  $N$  依存性 (両対数プロット)、横軸: $N$ 、縦軸:CT、赤:RW (平均±標準偏差)、青: 走化性系 (平均±標準偏差)、黒実線: $\propto 1/N$  を示す。ただし、 $1 \leq N \leq 8000$ 、 $L = 100$  である。

では、RW に近づくため、それぞれのエージェント数  $N$  に対して、図2の赤とほぼ一致する。小さい  $\lambda$  の CT は、それぞれのエージェント数  $N$  に対して、図2の青とほぼ一致する。これは、 $\lambda$  を制御パラメータとして、連続的に CT を調節できることを示している。

## 6 今後の展開

今回扱った問題設定は、(1) 走化性エージェント間の相互作用として斥力のみを考慮している点、および (2) 濃度場を完全に観測できる完全観測制御を仮定している点に限定されている。今後は、未踏地点からの報酬が引力として拡散する濃度場を導入し、斥力と引力を組み合わせることで、さらなる被覆時

間 (CT) の短縮が可能かを検討する。この実現のために部分観測制御 [15] の枠組みを導入し、より現実的な観測制約下での探索戦略を解析する予定である。さらに、本研究の枠組みは正方形格子に限らず、三角格子や六角格子などの異なる格子構造、不規則形状領域、さらには障害物を含む環境へと自然に拡張可能である。また、探索の再帰性を抑制することで被覆時間を短縮するという考え方は、マルチロボットによる探索・巡回・清掃問題や、訪問の重複がコストとなる探索・被覆タスクなど、実社会における探索戦略への応用も期待される。

## 参考文献

- [1] A. Dembo, Y. Peres, J. Rosen, and O. Zeitouni, *Annals of Mathematics*, vol. 160, no. 2, pp. 433–464 (2004).
- [2] M. Chupeau, O. Bénichou, and R. Voituriez, *Nature Physics* **11**, 844–847 (2015).
- [3] T. Vicsek and A. Zafeiris, *Physics Reports* **517**(3–4), 71–140 (2012).
- [4] Y. Sugiyama “Dynamics of Asymmetric Dissipative Systems”, Springer Singapore (2023).
- [5] X. Wang and F. Cichos, *Nature Communications* **15**, 774 (2024).
- [6] J.-X. Chen, J.-Q. Hu, R. Kapral, *Advanced Science* **11**, e2305695 (2024).

- [7] H. Miyahara, H. Yoneki, T. Mizohata, V. Roychowdhury, *Journal of the Physical Society of Japan* **94**, 084002 (2025).
- [8] C. Oosawa, “Motility and stability of chemotactic agents that chained linearly,” *Papers of the 29th Symposium on Traffic Flow and Self-driven Particles*, vol. 29, pp. 17–20 (2023).
- [9] R. Metzler and J. Klafter, “The random walk’s guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach,” *Physics Reports* **339**, 1–77 (2000).
- [10] A. Kirchner, K. Nishinari, A. Schadschneider, *Physical Review E*, **67**, 056122 (2003).
- [11] C. Oosawa, *Artificial Life and Robotics*, **30**, 458–464 (2025).
- [12] H. J. Kappen, *Journal of Statistical Mechanics* P11011 (2005).
- [13] E. Todorov, NIPS’06: Proceedings of the 20th International Conference on Neural Information Processing Systems, 1369–1376 (2006).
- [14] M. Kato, J. T. Kobayashi, *Physical Review X* *Life* **3**, 043005 (2025).
- [15] K. Nakamura, J. T. Kobayashi, *Physical Review Research* **4**, 013120 (2022).

## 付録：式 (3) の導出

ここでは、線形可解なマルコフ決定過程の枠組みを用いて、式 (3) の導出を概略として示す [12, 13, 14].

### 離散時間 KL 正則化付き Bellman 方程式

離散状態空間  $X$  上で、現在状態を  $x \in X$ 、次状態を  $x' \in X$  とする。受動遷移確率を  $p_0(x'|x)$  (参照方策) とし、制御された遷移確率 (方策) を  $\pi(x'|x)$  (制御方策) とおく。ステージコストを  $c(x'|x)$  とし、KL 正則化項  $\lambda D_{\text{KL}}(\pi(\cdot|x)||p_0(\cdot|x))$  を加えた離散時間 Bellman 方程式は、

$$V(x) = \min_{\pi(\cdot|x)} \sum_{x'} \pi(x'|x) \left[ c(x'|x) + \lambda \log \frac{\pi(x'|x)}{p_0(x'|x)} + V(x') \right] \quad (\text{A1})$$

と書ける。

状態  $x$  を固定し、 $\sum_{x'} \pi(x'|x) = 1$  の制約の下で右辺の汎関数を最小化する。ラグランジュ乗数  $\beta(x)$

を用いて

$$L = \sum_{x'} \pi(x'|x) \left[ c(x'|x) + \lambda \log \frac{\pi(x'|x)}{p_0(x'|x)} + V(x') \right] + \beta(x) \left( \sum_{x'} \pi(x'|x) - 1 \right) \quad (\text{A2})$$

とおき、 $\partial L / \partial \pi(x'|x) = 0$  から

$$\log \frac{\pi(x'|x)}{p_0(x'|x)} = -\frac{c(x'|x) + V(x')}{\lambda} + \text{const.}(x) \quad (\text{A3})$$

を得る。両辺を指数関数で戻すと、最適方策は

$$\pi^*(x'|x) = \frac{p_0(x'|x) \exp[-\{c(x'|x) + V(x')\}/\lambda]}{\sum_y p_0(y|x) \exp[-\{c(y|x) + V(y)\}/\lambda]} \quad (\text{A4})$$

となる。すなわち、 $p_0(x'|x)$  を基準分布とするソフトマックス型の方策となる。

### 自己回避ポテンシャルの導入と局所近似

式 (1) から得られる  $I$  をステージコストとして組み込む。

$$c(x'|x) = b(x) + \tilde{c}(x'), \quad \tilde{c}(x') = -k_{\text{KL}} I(x') \quad (\text{A5})$$

とする。さらに、 $b(x)$  は現在状態のみに依存する項であり、式 (A4) の分子・分母で打ち消し合うため、移動方向の選択には影響しない。

さらに、現在位置  $x$  の近傍  $N(x)$  において値関数  $V(x')$  の変動が小さいとみなし、 $V(x') \approx \text{const.}$  を仮定する。このとき、 $\exp\{-V(x')/\lambda\}$  は分子・分母で相殺されるため、式 (A4) は近似的に

$$\pi^*(x'|x) \approx \frac{p_0(x'|x) \exp[k_{\text{KL}} I(x')/\lambda]}{\sum_{y \in N(x)} p_0(y|x) \exp[k_{\text{KL}} I(y)/\lambda]} \quad (\text{A6})$$

となる。これを本文で導入した KL 制御付き自己回避方策  $P_{\text{KL}}(r'; t+1 | r_a; t)$  と同一視すると、式 (3) が得られる。