

Bak-Sneppen 的板モデルによる株式市場の臨界性の再考

南雲将太¹, 島田尚^{1,2}

¹ 東京大学 大学院工学系研究科 システム創成学専攻

² 東京大学 数理・情報教育研究センター

概要

株価の変動はべき分布に従うことが知られているが, このような臨界性を示すための条件はなんだろうか. 今回, 生物種の共進化系における自己組織的臨界現象 (SOC) を説明した Bak-Sneppen モデルをベースとして, 指値板のモデルを構築した. その結果, 注文のキャンセル率が小さい場合に, 指値板の注文分布が臨界状態へと自発的に変化することが明らかになった.

Reconsideration of criticality in stock market using Bak-Sneppen-like order book model

Shota Nagumo¹, Takashi Shimada^{1,2}

¹ Department of Systems Innovation, Graduate School of Engineering, The University of Tokyo

² Mathematics and Informatics Center, The University of Tokyo

Abstract

The fluctuations in stock prices are known to follow a power-law distribution, but what conditions lead to the criticality? In this study, a limit order model was constructed based on the Bak-Sneppen model, which explained a self-organized criticality (SOC) in coevolutionary system of biological species. The results revealed that the order distribution of the limit book becomes the critical state spontaneously when the cancellation rate of orders is small.

1 はじめに

株価の変動は正規分布ではなくべき分布に従うことが知られており, 株式市場では極端に大きい株価の騰落が時に発生する [1]. この株価の変動のべき乗則は, 投資戦略を持たない投資家と指値板のみを実装したシンプルなモデルである, Maslov モデルによって再現されている [2]. 従って, 現実の株式市場における臨界性は, 投資家の戦略ではなく, 指値板における取引ルールそのものに起因して引き起こされる可能性を示唆する. 他方, 指値注文や成行注文, 注文のキャンセルなど複数存在する取引ルールのうち, どの要素が臨界性の主因となっているのかは, 必ずしも明らかでない.

本研究では, 株価の臨界性を引き起こす条件を特

定するため, Maslov モデルをさらに簡略化する. その際, 生物種の共進化系における SOC を説明した Bak-Sneppen モデルの平均場近似モデル [3] と指値板のアナロジーに着目し, 指値板に応用する.

2 モデル

2.1 現実の株式市場

指値板のモデル化にあたり, 現実の株式市場における注文や約定のルール, 指値板について概説する. まず指値注文とは, 価格を指定して売り買いいずれかの側に発注される注文である. 約定されるまでの間, 指値注文は指値板という注文リストに掲載される. 指値板上の注文のうち, 売りであれば最も安い注文 (best ask) から, 買いであれば最も高い注文

(best bid) から順々に約定され、指値板から消えていく。指値板上の注文は約定を待たずにキャンセルされることもある。指値注文とは別の注文方法として、成行注文という、価格を指定せず指値板上の指値注文と即座に約定させる方法もある。

2.2 Maslov モデル

Maslov モデルは、前述の現実の株式市場における注文や約定のルール、指値板をモデル化したものである。Maslov モデルでは、投資家は売り買いの選択の他、指値注文と成行注文の選択を確率的に行う。ある時点での約定価格を X としたとき、売り指値注文の価格は一様分布 $U(X, X + \Delta)$ に、買い指値注文の価格は一様分布 $U(X - \Delta, X)$ にそれぞれ独立に従うとする。

2.3 Bak-Sneppen 的板モデル

Bak-Sneppen モデルの平均場近似モデルでは、環境への適応度が最も低い種とランダムに選んだ種を選択した上、それらの種の適応度を確率的に振り直し、これを進化と見做す。ここで、「適応度が最も低い種を選択」と「best ask と best bid の約定」、「ランダムに選んだ種を選択」と「キャンセル」、「進化」と「指値注文」の間のアナロジーに着目し、指値板を以下の通りモデル化する。

0. 指値板に売り注文 N 個、買い注文 N 個を初期配置する。それぞれの価格は一様分布（売りは $U(0, \Delta)$ 、買いは $U(-\Delta, 0)$ ）に従って独立に決定する。
1. 確率 $1/2$ で best ask の注文を、確率 $1/2$ で best bid の注文を約定させ、指値板から消す。約定した注文の価格を市場の現在価格 X と定義する。
2. 指値板に残った注文をそれぞれ確率 c でランダムにキャンセルし、指値板から消す。
3. 1 と 2 で消えた売りの注文数と同数の指値注文を、売りの指値板へ新規に入れる。それぞれの価格は一様分布 $U(X, X + \Delta)$ に従って独立に決定する。買い側も同様のルールで注文を補充し、それぞれの価格は一様分布 $U(X - \Delta, X)$ に従って独立に決定する。
4. 時刻を 1 カウントアップして、1 へ戻る。

本モデルは、Maslov モデルにおける指値注文の価格の決定方法を踏襲している。他方、本モデルは、Maslov モデルにおける成行注文と指値注文の確率的

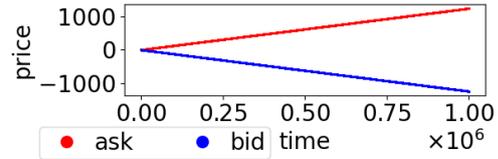


図 1: キャンセル率 0 における注文の分布. 売り注文と買い注文が一定のスピードでかい離していく。

選択という要素を排除し、売り側・買い側それぞれで注文数が一定に保存された設定となっている。なお、売り買いそれぞれの注文数は $N = 100$ とした。また、 $\Delta = 0.5$ とした。

3 結果

3.1 注文分布

図 1-3 に指値板上の注文分布を示す。各時点各価格に存在する売り注文を 1 つの赤点、買い注文を 1 つの青点で表している。キャンセル率 $c = 0$ の場合には、best ask や best bid の注文が約定されるというルールにより、図 1 に示す通り、売り注文と買い注文が一定のスピードでかい離していく。 c が一定程度大きい場合には、キャンセル後に新規に入れられる注文の存在により、図 2 に示す通り、売り注文と買い注文がかい離することなく密に分布する。

興味深いのはキャンセル率 c がそれらの間の場合で、図 3 に示す通り、注文が密に分布する部分と疎に分布する部分が共存する。図 3 のダイナミクスを詳細に観察すると、 $\mathcal{O}(1/(cN))$ の期間はキャンセルが発生せず図 1 の場合のように best ask と best bid が一定のスピード $\mathcal{O}(\Delta)$ でかい離している。よって、かい離幅の最大値は $\mathcal{O}(\Delta/(cN))$ である。キャンセルが発生するとその分の指値注文が現在価格の外側に入り、次のキャンセルまで新たに best ask と best bid が一定のスピードでかい離していく。

3.2 価格変動幅の分布

現在価格 $X(t)$ の変動幅 $\Delta X = X(t+1) - X(t)$ の分布を見る。キャンセル率が $c = 10^{-1}$ の場合 (図 4)、極端に大きい変動は生じない。

他方、キャンセル率が $c = 10^{-4}$ の場合 (図 5)、 $\Delta X \lesssim 1$ の範囲で ΔX は指数 0.9 のべき分布に従う。それ以降のフラットな分布は、前述の best ask と best bid のかい離局面において、現在価格が best ask と best bid の間を行き来する際の変動に対応す

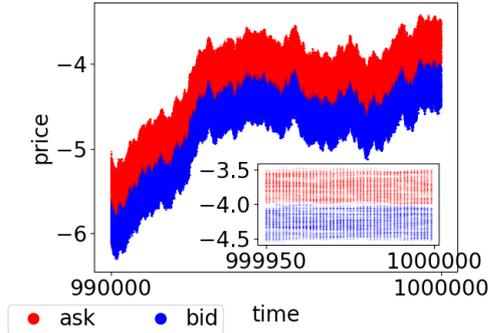


図2: キャンセル率 10^{-1} における注文の分布. 売り注文と買い注文がかい離せず密に分布.

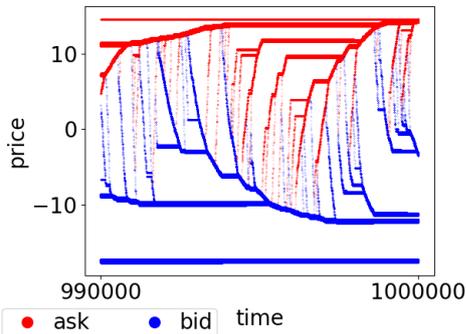


図3: キャンセル率 10^{-4} における注文の分布. 注文が密に分布する部分と疎に分布する部分が共存.

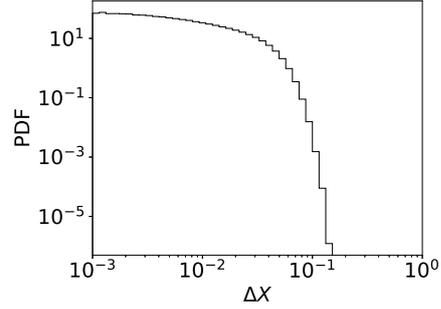


図4: キャンセル率 $c = 10^{-1}$ における価格変動幅 ΔX の分布. 極端に大きい変動は生じない.

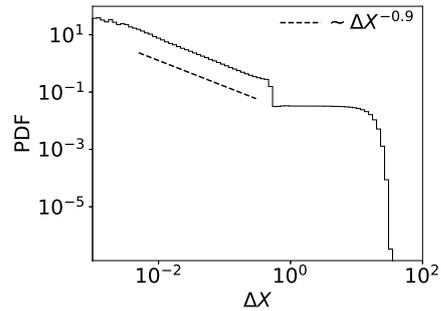


図5: キャンセル率 $c = 10^{-4}$ における価格変動幅 ΔX の分布. 臨界的な状態になっている.

る. フラットな分布のカットオフは, best ask と best bid のかい離幅の最大値 $O(\Delta/(cN))$ に等しい.

3.3 注文分布の転移的振る舞い

キャンセル率により注文分布や価格変動幅の分布の様相が異なることを見てきた. その転移点を調べるために, 注文の分布の広がりを情報論的エントロピー $H = -\sum_i p_i \log p_i$ により定量化する. ここで p_i は, 指値板の価格を幅 1 で区切ったとき, i 番目の bin に存在する注文数の割合を表す. H の時間平均の c 依存性をプロットしたのが図6である. キャンセル率 $c = 10^{-2}$ 付近で転移が見られる.

3.4 転移点とスプレッド

上記の転移点は理論的に見積もり可能である. best ask と best bid の価格差 (スプレッド) を L と定義し, スプレッド L 内の注文数の保存条件を考える. ただし, スプレッド L の上端と下端に位置している best ask と best bid の注文数はそれぞれ $1/2$ の寄与であると想定する. 以下, 売り注文 best ask が約定される状況を想定する.

1. 約定・キャンセルに伴うスプレッド L 内の注文の減少:

best ask が約定され, best bid が c の確率でキャンセルされるため, 注文数の減少は $(1+c)/2$ と見積もれる.

2. 指値注文に伴うスプレッド L 内の注文の増加: 指値板上の買い注文 N のうち cN 個がキャンセルされ, それと同数の買いの指値注文が, best ask の価格を上端とする幅 Δ の一様分布により入れられる. $L < \Delta$ のとき, スプレッド L 内に入る指値注文の数は, cNL/Δ である,

以上の概念図を図7に示す. これより, スプレッド L 内における注文数保存の式は, 以下の通りとなる.

$$\frac{1+c}{2} \simeq cN \frac{L}{\Delta}. \quad (1)$$

よって,

$$L \simeq \frac{1+c}{2cN} \Delta. \quad (2)$$

これが成り立つのは, 上記の通り $L < \Delta$ の場合に限るので, 転移点は $c \simeq 1/(2N) \sim 10^{-2}$ と見積もることができる. また, スプレッド L について, $c \gg 10^{-2}$

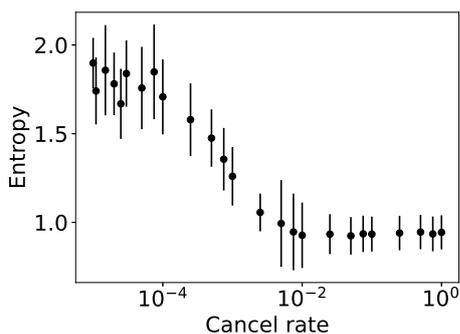


図 6: 注文分布の情報論的エントロピーの c 依存性. エラーバーは標準偏差を表す. キャンセル率 $c = 10^{-2}$ 付近で転移が見られる.

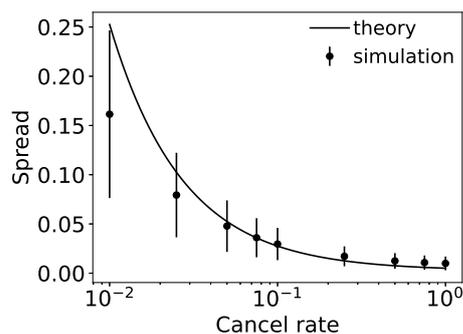


図 8: キャンセル率 c とスプレッドの期待値 L の関係. エラーバーは標準偏差を表す. $c \gg 10^{-2}$ の範囲で, シミュレーション結果と理論値 (2) が一致.

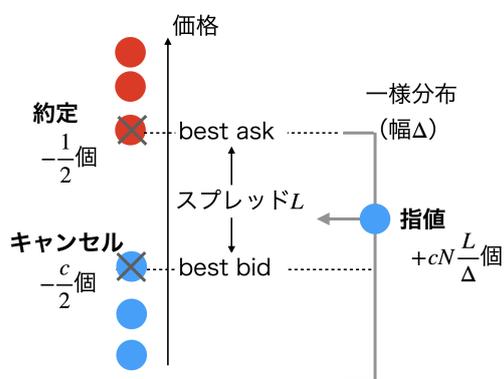


図 7: スプレッド L 内の注文数の増減. 赤丸が売り注文, 青丸が買い注文を表す. 約定により $1/2$ 減少, キャンセルにより $c/2$ 減少し, 指値注文により cNL/Δ 増加する.

の範囲で, シミュレーション結果と理論値 (2) が一致する (図 8).

4 まとめ

Bak-Sneppen モデルに準じた指値板モデルを構築した. 本モデルは Maslov モデルと異なり指値板上の注文数は確率的に揺らぐことなく固定されており, 注文数の確率性は価格変動幅の臨界性に関し必須の条件ではないことが明らかになった. また, キャンセル率がある転移点よりも小さい場合に, 指値板上に注文が密に分布する部分と疎に分布する部分が共存し, この相では臨界的な価格変動幅を見せた.

Maslov モデルでは, 価格変動幅 $\Delta X \lesssim 1$ の範囲で指数 0.6, それ以降の範囲で指数 3 のべき分布に従う. 本モデルでは, $\Delta X \lesssim 1$ の範囲で指数 0.9 のべき分布, これより大きい領域でフラットな分布と

なった. 両モデルにおける指値板の内部構造の差異についての詳細な解析は今後の課題である.

現実の株式市場では, キャンセルと指値注文を絶えず繰り返す高速取引業者 (HFT) が存在する. 本研究により, HFT が参入している銘柄では株価の臨界性が抑制される可能性が示唆された. 現実の株式市場では, 注文がキャンセルされるまでの待ち時間は指数 1.4 のべき分布に従う [4] ため, 極端にキャンセル率が低い銘柄も存在する. そういった銘柄で今回の臨界性が実際に観察されるのか, より詳細な実証研究が望まれる.

参考文献

- [1] Rosario N Mantegna and H Eugene Stanley. Scaling behaviour in the dynamics of an economic index. *Nature*, Vol. 376, No. 6535, pp. 46–49, 1995.
- [2] Sergei Maslov. Simple model of a limit order-driven market. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. 278, No. 3–4, pp. 571–578, 2000.
- [3] Henrik Flyvbjerg, Kim Sneppen, and Per Bak. Mean field theory for a simple model of evolution. *Physical review letters*, Vol. 71, No. 24, p. 4087, 1993.
- [4] Anirban Chakraborti, Ioane Muni Toke, Marco Patriarca, and Frédéric Abergel. Econophysics review: I. empirical facts. *Quantitative Finance*, Vol. 11, No. 7, pp. 991–1012, 2011.