数値くりこみによる時間遅れを含む２階微分方程式解の安定性解析

本田　泰

室蘭工業大学 しくみ解明系領域

概要

一般的に，物理系の運動方程式やフィードバック制御システムなどに時間遅れが含まれると，その挙動は予測困難な場合が多い．時間遅れがないと仮定すれば安定するシステムにおいても，不安定な挙動を示す場合がある．制御理論においては伝達関数のパデ近似などを用いて，それは回避されるが，物理的描像は不明確である．

本研究では，時間遅れを含む２階微分方程式の解が，どのような性質をもつか，遷移行列の固有値を用いて，系の安定性解析を行った．時間遅れを考慮した遷移行列の固有値を用いて，微分方程式の係数を繰り込むことによって系が不安定になる領域の存在を示すことができた．不安定（あるいは安定）領域をシミュレーションによる結果と比較すると，相似した形状が得られた．

Stability analysis of a second order differential equation with time delay by a numerical renormalization

Yasushi Honda

College of Information and System, Muroran Institute of Technology, Japan

Abstract

Generally speaking, in the case where a time delay is included in an equation of motion or a feedback control system, it is impossible to expect the behavior in a simple manner. There is a possibility that the time delay brings unstable state of the system which is stable without the time delay. In the control theory, the pade approximation for the transfer function is used to analize a system with a time delay. However it dose not depict physics.

In this study, we propose a renormalization for coefficients of a second order differential equation. Unstable region in coefficien space is exhibited by this renormalizetion method. The shape of stable or unstable region is similar to that obtained by simulations for the same differencial equation with the time delay.

1　時間遅れのない２階微分方程式

時間遅れを含む微分方程式を扱うまえに，比較のために時間遅れを含まない次のような時間 t に関する 2 階微分方程式があるとする．

$$\ddot{x}(t) = -a\dot{x}(t) - bx(t) \tag{1}$$

x は単振り子の角度や電流など，どのような物理量でもよい．また，係数 a の項は摩擦などの抵抗に対応する項である．一方 b の項が重力やバネなどによる力に対応する項である．a, b は実数係数 (ゲイン) である．

フィードバック系の制御においては，PD 制御とみなすこともできる．$a = 0$ であれば系は振動状態となるが，$a > 0$ とすることによって，系は減衰振動すなわち安定化する．

2　時間遅れを含む場合に対するシミュレーション結果

時間遅れが無いのであれば，$a > 0$ である限り状態が発散することはなく，かならず減衰振動する．

一般に見られるように時間遅れがある場合には，b の項による振動に加えて，ハンチングと呼ばれる振動現象が観測されることがある．ハンチング現象においては，$a > 0$ であったとしても，振動が発散する場合もあり得る．つまり，時間遅れを無視した微分方程式の解では起こり得ない現象が現れる．

次のような時間遅れ δ を含む 2 階微分方程式があるとする．

$$\ddot{x}(t) = -a\dot{x}(t-\delta) - bx(t-\delta) \tag{2}$$

図 1 にシミュレーションによって得られた a-δ 空間における，相図を示した．いま，$b = 1$ とする．したがって角振動数 $\omega = 1$ すなわち振動周期は 2π である．

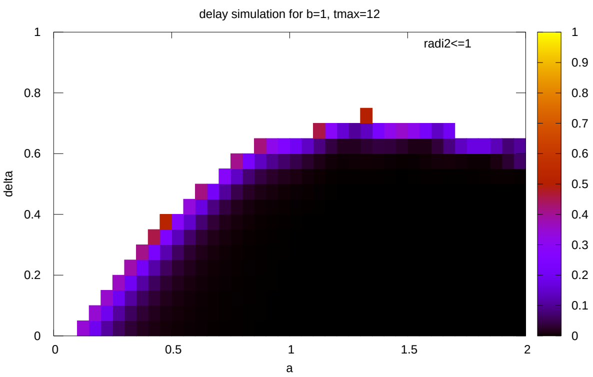

図 1: シミュレーションによる，a-δ 空間の相図 ($b = 1, dt = 10^{-4}$) 白い領域が不安定領域．色を付けた領域が安定領域．

白い領域は不安定領域である．$\delta < 0.7$ の領域では，δ の値が大きくなるに連れて不安定領域が拡大していることが分かる．いっぽう，$\delta > 0.7$ の領域では，a の値を大きくしても運動は安定しない．$b = 1$ の場合 $\delta_c \simeq 0.7$ である．

3 時間遅れの数値繰り込み

Δt を微小時間として，$\delta = \Delta t$ の場合，(2) 式を遷移行列を用いた漸化式の形で書くと，

$$\begin{pmatrix} \vec{s}_{i+1} \\ \vec{s}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{I} + \Delta t \hat{A}_0 & \Delta t \hat{A}_1 \\ \hat{I} & \hat{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{s}_i \\ \vec{s}_{i-1} \end{pmatrix} \tag{3}$$

と書ける．記号の詳細は本講演および講演論文で詳述するが，元の微分方程式は，遷移行列による状態ベクトル $\vec{s}_i$ の漸化式で記述できることを示した．

最終的には，

$$\delta = n\Delta t \qquad (n \to \infty, \Delta t \to 0) \tag{4}$$

の極限を取る必要があるので，遷移行列は無限次元となり，そのままでは取り扱うことができないという点だけを指摘しておく．

この遷移行列の特性方程式は，固有値を η とすると，

$$\det \begin{pmatrix} 1-\eta & 0 & -\Delta t a & -\Delta t b \\ \Delta t & 1-\eta & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\eta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\eta \end{pmatrix} = 0 \tag{5}$$

となるので，余因子展開を 2 回行うと

$$(\eta - 1)\{\eta(\eta-1) + \Delta t a\} + \Delta t^2 b \quad = \quad 0 \tag{6}$$

という 3 次方程式になる．この (6) 式の解を，特に η_s と書くことにする．

a_r, b_r を

$$a_r \equiv \frac{a}{\eta_s}, \quad b_r \equiv \frac{b}{\eta_s} \tag{7}$$

と定義すると，(6) 式は

$$(\eta_s - 1)\{(\eta_s - 1) + \Delta t a_r\} + \Delta t^2 b_r \quad = \quad 0 \tag{8}$$

となる．このかたちは，時間遅れがない場合の特性方程式とまったく同じである．つまり，(7) 式のように係数 a, b を修正（繰り込み）することによって，時間遅れがない場合と同様の形式で，時間遅れがある場合を定式化できた．

この繰り込まれた係数 a_r, b_r を再び，(6) 式の係数として用いると，それは時間遅れ $\delta = 2\Delta t$ の系の特性方程式と等価とみなすことができる．これを繰り返すことで，$\delta = n\Delta t$ の特性方程式に対応する固有値を得ることができる．

この数値くりこみを実行して得られた a-δ 空間の 2 次元相図を図 2 に示す．白い領域で系は不安定となり，振動は発散する．すなわち，時間遅れ δ の存在によって，2 階微分方程式の解が不安定になる領域が存在することを係数の繰り込みによって理論的に示すことができた．

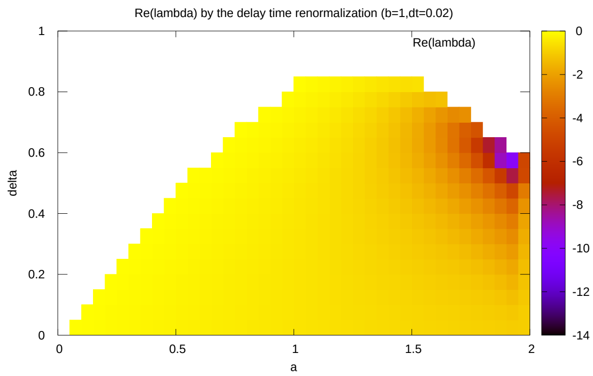

図 2: 数値繰り込みを用いて得られた相図． ($b = 1, \Delta t = 0.02$) 色付けされていない領域では系は不安定．色付けされている領域で，系は安定する