連続 OV モデルにおける安定・不安定平衡点の数値解析

石渡 龍輔 [1], 野村 保之 [2], 杉山 雄規 [3]

[1] 東北大学 東北メディカル・メガバンク機構 ゲノム医科学情報学分野,
[2] 福井工業高等専門学校, [3] 名古屋大学 大学院情報学研究科 複雑系科学専攻

概要

連続 OV モデルの解析計算で得られた安定・不安定平衡点が数値計算でも再現されることを検証する.

Numerical analysis of stable and unstable fixed points in the continuous OV model

Ryosuke Ishiwata[1], Yasuyuki Nomura[2], Yuki Sugiyama[3]

[1] Department of Informatics for Genomic Medicine, Tohoku Medical Megabank Organization, Tohoku University, [2] National Institute of Technology, Fukui College,
[3] Department of Complex Systems Science, Graduate School of Informatics, Nagoya University

Abstract

We verify that the stable and unstable fixed points obtained from analytical calculations of the continuous OV model are reproduced in the numerical calculations.

---

1 はじめに

魚や鳥や昆虫の群れの移動，自動車の交通流などは，自己駆動する物体により創発される集団運動として研究されている．自己駆動する物体は，作用・反作用や運動量保存の法則を満たさない非対称相互作用によって駆動されることが多い．非対称相互作用は，エネルギーの散逸とともに導入されておりそのような物理系は，非対称散逸系（Asymmetric Dissipative System）ともよばれる [1]．集団運動を特徴づける巨視的な物理量を調べることは，非対称散逸系においても重要であると考えられる．

巨視的な物理量を発見する足がかりとして，連続化された最適速度模型（OV）モデルにおいて解析計算によって予見されている安定・不安定平衡点への収束ならびに発散が再現されることを確認する．

2 連続 OV モデル

OV モデルは交通流の数理モデルであり，j 番目の粒子の位置 x_j（$1 \le j \le n$）の運動方程式が

$$\ddot{x}_j = a\big[V\big(\Delta x_j\big) - \dot{x}_j\big] \tag{1}$$

で与えられる [2]．ただし $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$ であり周期境界を考える場合，$x_0 = x_n - L$ および $x_{n+1} = x_1 + L$ とする（L はシステムの大きさを表す定数）．また V は tanh 型の OV 関数 $V(x) = v_0[\tanh\beta(x - b^\star) + \Gamma]$，とする，ただし $\Gamma = \tanh\beta b^\star$．

ここで変数 $r_j = \Delta x_j - b$ を導入して方程式 (1) を書き換える（ただし b は平均車間）．x_{j+1} と x_j の方程式の差を取れば r_j の運動方程式が得られる．

$$\ddot{r}_j = a\big[V\big(r_{j+1} + b\big) - V\big(r_j + b\big) - \dot{r}_j\big]. \tag{2}$$

ただし $V(x) = v_0 \tanh \beta(x - b^\star)$ と置き換えて良い．ここで添字を $r_j(t) \equiv r(t,j)$ と表現しても良いこと，さらに $r(t,j)$ が j に関してべき級数展開できる関数で与えられる（$r(t,j) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{(k)}(t,0)}{(k!)} j^k$）とき，シフトオペレーターを作用させると $\exp\left(\frac{\partial}{\partial j}\right) r(t,j) = r(t,j+1)$ となる [3, 4]．シフトオペレーターを用いた表記にして平均車間を $b = L/n$ と固定した上で，n について連続極限 $bj \to x, r(t,j) \to r(t,x), N \to \infty, L \to \infty$ をとると式 (2) は次のように書き換えられる．

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = a\left[\left(\exp\left(b\frac{\partial}{\partial x}\right) - 1\right)V(r+b) - \frac{\partial r}{\partial t}\right].$$

このとき r が定常伝播解を持つと仮定して，$r(t,x) = u(\xi), \xi = x - ct$（$c$ は伝播するクラスタの速度）とおいて，$\exp\left(\pm b\frac{\partial}{\partial x}\right)$ の 3 次まで展開して，積分をおこない $u = 0, \dot{u} = 0$ の解を持つように積分定数を設定し $v := \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}$ と変数を設定すれば，

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi} = v, \tag{3a}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi} = \frac{6}{ab^3V'}\left[c^2v - cau - abV\right] - \frac{3v}{b} - \frac{V''}{V'}v^2, \tag{3b}$$

となる．ただし $V(r+b) = v_0 \tanh \beta(r + b - b^\star) - v_0 \tanh \beta(b - b^\star)$ である．

3 結果と考察

得られた式 (3) を 4 次ルンゲ=クッタ法を用いて数値計算をおこなった．先行研究 [3] にて解析計算で得られている $b = b^\star, a < a_c^\star$ における不安定平衡点（らせん状の発散）と $b \neq b^\star, a_c < a$ での安定平衡点（1 点へのらせん状の収束）を確認した．どちらも $u_0 = v_0 = 1 \times 10^{-6}$ からのシミュレーション計算で，$b^\star = 1, v_0 = 1, \beta = 1$ と設定し，解析計算 [3] により得られている $a_c^\star = 2\beta v_0$, $c^\star = -b^\star \beta v_0$ ならびにクラスタ速度 $c(a)$ を用いた．

$b \neq b^\star$ の場合に a が a_c と近すぎた場合数値が発散することがあったが，これは a の値が共存相に含まれてしまったことが原因だと考えられる．これを除いて，解析計算を再現する結果が得られたと言える．

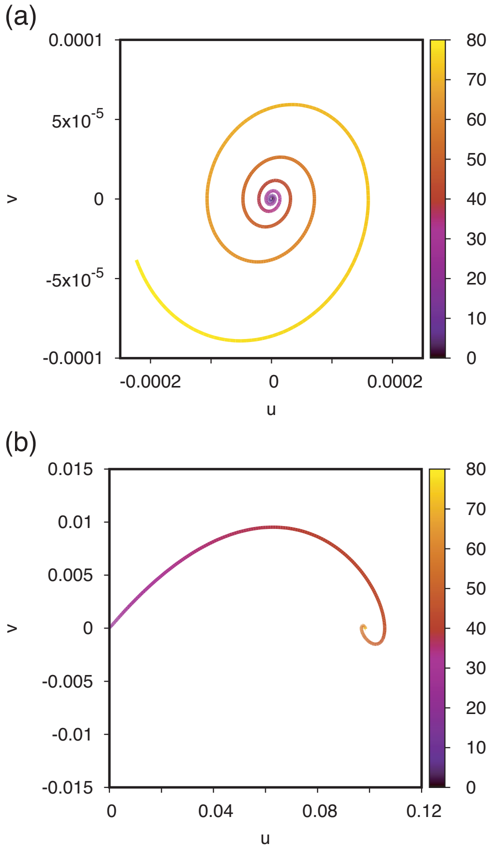

図 1: 色でタイムステップを表した．(a) $b = b^\star = 1$, $a = a_c^\star - 0.2$, $c(a) = c^\star\left(1 - \frac{a_c^\star - a}{3a_c^\star}\right) = -0.966667$. (b) $b = 0.8$, $a = a_c + 0.2$, $a_c = 2V'(b) = 1.92209$, $c(a_c) = -bV'(b)$, $c(a) = c(a_c)\left[1 - \frac{a_c^\star(a-a_c)^2}{12a_c^2(a_c^\star - a_c)}\right] = -0.781472$.

参考文献

[1] Y. Sugiyama, Asymmetric Interaction in Non-equilibrium Dissipative System towards Dynamics for Biological System, in Natural Computing 1 of Natural Computing 189 – 200, 2009.

[2] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata, and Y. Sugiyama, Dynamical model of traffic congestion and numerical simulation, Physical Review E, 51, 2 1035 – 1042, 02, 1995.

[3] Y. Nomura, S. Saito, R. Ishiwata, and Y. Sugiyama, Hopf bifurcation analysis for a dissipative system with asymmetric interaction: Analytical explanation of a specific property of highway traffic, Physical Review E, 93, 1 012215:1–12, 01, 2016.

[4] Y. Sugiyama, Dynamics of Asymmetric Dissipative Systems: From Traffic Jam to Collective Motion, Springer, 2023.