

# 混雑を考慮した鉄道通勤行動の mean field game モデル

石井 諒太郎<sup>1</sup>, 渡辺 樹<sup>1</sup>, 豊泉 洋<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 早稲田大学大学院 基幹理工学研究科 数学応用数理専攻

## 概要

鉄道路線で運行されている 2 種類の列車で異なる賃率を設定したときの通勤者の行動を多数の他の通勤者とのゲームとして捉え, mean field game (MFG) の観点からモデル化を行い, Mean Field Equation (MFE) 系として定式化できることを示した. また, 先行研究と本稿のそれぞれの MFE で考えられている空間および時間に関する相違点を述べる.

## The Mean Field Game Model of the Rail Commuter Behavior Allowing for Congestions

Ryotaro Ishii<sup>1</sup>, Itsuki Watanabe<sup>1</sup> and Hiroshi Toyoizumi<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Department of Pure and Applied Mathematics, Graduate School of Fundamental Science and Engineering, Waseda University

## Abstract

We constructed the commuter behavior model from a viewpoint of the mean field game (MFG) and obtained the mean field equation (MFE) describing his behavior, considering his behavior as a game with a large number of other commuters in a railway in which two types of trains run. Moreover, we claim the difference between the MFE in this paper and in a previous research about space and time.

---

## 1 はじめに

本研究は都市圏の鉄道路線における混雑を緩和するための運賃システムを考えることを目的としている. 都市圏における鉄道路線の混雑は長年問題視されている. 混雑により列車の乗降時間の延長が引き起こされ, 列車の定時運行の障害の一因になっている. 平成 30 年度の東京圏における 10 分未満の遅延の原因のうち 48.3% は乗降時間超過である [1]. 混雑を緩和させることにより, より安定した列車の定時運行を可能になると考えられる.

本稿では都市と郊外を結ぶ 2 種類の列車が運行している鉄道路線において, 2 種類の列車の単位距離あたりの賃率が異なるときの通勤者の行動を多数の他の通勤者とのゲームとして捉え, mean field game (MFG) [2] の観点からモデル化し, mean field equation (MFE) 系として定式化できることを示した. また, [2] と本稿のそれぞれの MFE で考えられている空間および時間に関する相違点を述べる.

## 2 Mean Field Game

mean field game [2] の理論はシステム全体に及ぼす作用の小さいプレイヤーが多数存在するゲームの解析に用いられる． [2] で考えられている 1 階の MFE,

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \inf_{\alpha(x, t)} \left\{ \frac{1}{2} |\alpha(x, t)|^2 + F(x, m(t)) + Du(x, t) \alpha(x, t) \right\}, & (x, t) \in \mathbb{R}^d \times (0, T) \\ \frac{\partial m}{\partial t}(x, t) + \operatorname{div}(m(x, t) \alpha^*(x, t)) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^d \times (0, T) \\ m(x, 0) = m_0(x), u(x, T) = G(x, m(T)), & x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \quad (1)$$

において,  $\alpha^*$  は (1) の第 1 式の右辺の下限を達成する  $\alpha$ ,  $m(t)$  は時刻  $t \in [0, T]$  における他のプレイヤーの分布,  $m(x, t)$  は時刻  $t \in [0, T]$  における位置  $x \in \mathbb{R}^d$  の他のプレイヤーの密度を表わす． (1) の解  $(u, m)$  のうち,  $u(x, t)$  は時刻  $t \in [0, T]$ , 位置  $x \in \mathbb{R}^d$  におけるプレイヤーの価値関数で,

$$u(x, t) = \inf_{\alpha} \int_t^T \left( \frac{1}{2} |\alpha(x(s), s)|^2 + F(x(s), m(s)) \right) ds + G(x(T), m(T)) \quad (2)$$

をみます．ただし,  $\alpha(x, t)$  は時刻  $t \in [0, T]$  における地点  $x \in [0, 1]$  でのプレイヤーの速度,  $x(t) = x + \int_0^t \alpha(x(s), s) ds$  は時刻  $t \in [0, T]$  におけるプレイヤーの位置である．また, (2) の右辺の下限を達成するプレイヤーの速度は  $\alpha^*$  で,  $\alpha^* = -Du$  となる．このシステムは弱解, 粘性解, 不動点定理などの手法 [2, 3] により, 解の性質が調べられている． $F, G$  がプレイヤーの位置  $x$  と他のプレイヤーの分布について連続かつ任意の分布  $m$  に対して  $C^2$  ノルムで有限であることと, 他のプレイヤーの初期分布  $m_0$  について Lebesgue 測度に関して絶対連続, 有界でコンパクトな台をもつことを仮定したときに (1) の解の存在が示されている ([2] Theorem 4.1).

## 3 通勤者の行動モデル

都心と郊外を結ぶ鉄道路線における通勤者の行動を考える．鉄道路線の運行区間を  $[0, 1]$  とし, 運行区間内では各駅停車, 急行の 2 種類の列車が運行しているとする．各駅停車, 急行のそれぞれの速さを  $v_l, v_e$  ( $0 < v_l < v_e$ ) とする．速度  $v$  に対する単位距離あたりの賃金を  $f(v)$  とする．このとき, 各駅停車, 急行に乗車するときの単位距離あたりの賃金はそれぞれ  $f(v_l), f(v_e)$  と表される．

通勤者は時刻  $t_0 \in [0, \infty)$  で地点  $x_0 \in [0, 1]$  から通勤を始め, 地点 1 へ向かうものとする．通勤者の地点 1 への理想到着時刻を  $t^* \in [0, \infty)$  とする．通勤者は各時刻, 各地点において, 次の 3 つの戦術,

- (a) 速度 0 で移動する (移動しない)
- (b) 速度  $v_l$  で移動する (各駅停車で移動する)
- (c) 速度  $v_e$  で移動する (急行で移動する)

のいずれかを選択するとする．ただし, 地点 1 において通勤者は戦術 (a) のみを選択するとする．また, 戦術の変更にかかる時間および戦術の変更によって生じるコストはいずれも 0 とする．

通勤者の行動を関数  $\alpha : [0, 1] \times [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  で表し,  $\alpha(x, t)$  を時刻  $t \in [t_0, \infty)$  における地点  $x \in [0, 1]$  での通勤者の移動速度とする．通勤者の移動速度  $\alpha(x, t)$  は  $t$  について右連続とする．通勤者は戦術 (a), (b), (c) のいずれかを選択するので, 通勤者の行動  $\alpha$  の値域は  $\{0, v_l, v_e\}$  の部分集合である．通勤者が行動  $\alpha : [0, 1] \times [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  をとったときの時刻  $t \in [t_0, \infty)$  における通勤者の位置を  $x(t)$  とすると,  $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \alpha(x(s), s) ds$  と表される．また, 行動  $\alpha$  をとったときの通勤者の地点 1 への初到達時間  $A(\alpha)$  は,  $A(\alpha) = \inf \{ t \in [t_0, \infty) \mid x(t) = 1 \}$  で表される．図 1 では通勤者は時刻  $t_0$  から時刻  $t_1$  は急行で移動

し、時刻  $t_1$  から時刻  $t_2$  は移動せず、時刻  $t_2$  から時刻  $t$  は各駅停車で移動している。時刻  $t$  において通勤者は  $\alpha(x(t), t) \in \{0, v_l, v_e\}$  を選択する。

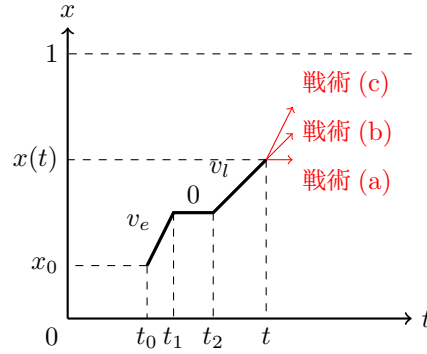


図 1: 鉄道路線の運行区間  $[0, 1]$  における通勤者の動きの例

時刻  $t \in [0, \infty)$  における地点  $x \in [0, 1]$  の各駅停車、急行に乗車する他の通勤者の密度を  $m_l(x, t)$ ,  $m_e(x, t)$ , 移動しない他の通勤者の密度を  $m_s(x, t)$  とする。時刻  $t \in [0, \infty)$  における地点  $x \in [0, 1]$  の他の通勤者全体の密度を  $m(x, t)$  とすると、

$$m(x, t) = m_l(x, t) + m_e(x, t) + m_s(x, t) \quad (3)$$

が成立する。また、時刻 0 における他の通勤者全体の密度を  $m_0$  とする。

### 3.1 通勤コスト

通勤者が行動  $\alpha$  をとるときの通勤コスト  $C(\alpha)$  を考える。本稿では通勤者の通勤コストを地点 1 までの運賃、混雑コスト、延着コスト、早着コストの 4 種類のコストの和として考える。地点 1 までの運賃は時刻  $t \in [t_0, \infty)$  における瞬間の賃率は  $f(\alpha(x(t), t))\alpha(x(t), t)$  となることから、 $\int_{t_0}^{\infty} f(\alpha(x(t), t))\alpha(x(t), t) dt$  で表される。混雑コストは通勤者の位置、通勤者の選択した戦術、各駅停車、急行にそれぞれ乗車する他の通勤者の密度に依存するものとし、 $\int_{t_0}^{\infty} F(x(t), m_l(x(t), t), m_e(x(t), t), \alpha(x(t), t)) dt$  とおく。延着コストおよび早着コストは、単位時間あたりにかかるコストを  $c > 0$  とすると、それぞれ  $c \cdot \max\{A(\alpha) - t^*, 0\}$ ,  $c \cdot \max\{t^* - A(\alpha), 0\}$  と表される。以上から本稿における通勤コスト  $C(\alpha)$  は、

$$C(\alpha) = \int_{t_0}^{\infty} (f(\alpha(x(t), t))\alpha(x(t), t) + F(x(t), m_l(x(t), t), m_e(x(t), t), \alpha(x(t), t))) dt + c|A(\alpha) - t^*| \quad (4)$$

と表される。

## 4 通勤者の行動における MFE

通勤者の行動における MFE を考える。鉄道路線の運行区間において全通勤者は共通の理想到着時刻  $t^* \in [0, \infty)$  をもつとする。また、時刻 0 における他の通勤者全体の密度を  $m_0$  とする。1 人の通勤者が時刻  $t \in [0, \infty)$  で地点  $x \in [0, 1]$  から通勤を始めるとする。時刻  $t$  で地点  $x$  からその後最適行動をとった場合の残余コスト関数を、

$$u(x, t) = \inf_{\alpha} \left\{ \int_t^{\infty} (f(\alpha(x(s), s))\alpha(x(s), s) + F(x(s), m_l(x(s), s), m_e(x(s), s), \alpha(x(s), s))) ds + c|A(\alpha) - t^*| \right\} \quad (5)$$

とおく. (5) の右辺の下限は通勤者が最適行動をとることを表わしており, 下限を達成する行動を  $\alpha^*$  とおく. (5) より,

$$-\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \min_{\alpha(x, t) \in \{0, v_l, v_e\}} \left\{ \left( f(\alpha(x, t)) + \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) \alpha(x, t) + F(x, m_l(x, t), m_e(x, t), \alpha(x, t)) \right\} \quad (6)$$

が得られる. (6) は (1) の第 1 式に相当する. 他の通勤者が最適行動  $\alpha^*$  で行動するとき, 各駅停車, 急行に乗車する他の通勤者の密度  $m_l^*(x, t)$ ,  $m_e^*(x, t)$  はそれぞれ  $m_l^*(x, t) = m(x, t) \mathbb{1}_{\{\alpha^*(x, t) = v_l\}}(\alpha^*(x, t))$ ,  $m_e^*(x, t) = m(x, t) \mathbb{1}_{\{\alpha^*(x, t) = v_e\}}(\alpha^*(x, t))$ , 移動しない他の通勤者の密度  $m_s^*(x, t)$  は  $m_s^*(x, t) = m(x, t) \mathbb{1}_{\{\alpha^*(x, t) = 0\}}(\alpha^*(x, t))$  となる. 時刻  $t \in [0, \infty)$  から微小時間  $\Delta t$  が経過したときの他の通勤者全体の密度は, 他の通勤者が最適行動  $\alpha^*$  で行動すれば,

$$m(x, t + \Delta t) = m_l^*(x - v_l \Delta t, t) + m_e^*(x - v_e \Delta t, t) + m_s^*(x, t) \quad (7)$$

となり, (3), (7) を用いると, 輸送方程式として,

$$\frac{\partial m}{\partial t}(x, t) + v_l \frac{\partial m_l^*}{\partial x}(x, t) + v_e \frac{\partial m_e^*}{\partial x}(x, t) = 0 \quad (8)$$

が得られる. (8) は (1) の第 2 式に相当する. (6), (8) および時刻 0 における他の通勤者の密度  $m_0$  から, 次の MFE,

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \min_{\alpha(x, t) \in \{0, v_l, v_e\}} \left\{ \left( f(\alpha(x, t)) + \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) \alpha(x, t) + F(x, m_l(x, t), m_e(x, t), \alpha(x, t)) \right\}, & (x, t) \in [0, 1] \times [0, \infty) \\ \frac{\partial m}{\partial t}(x, t) + v_l \frac{\partial m_l^*}{\partial x}(x, t) + v_e \frac{\partial m_e^*}{\partial x}(x, t) = 0, & (x, t) \in [0, 1] \times [0, \infty) \\ m(x, 0) = m_0(x), & x \in [0, 1] \end{cases} \quad (9)$$

が得られる. (1) においてプレイヤーは有限の期間  $[0, T]$  において非有界な空間  $\mathbb{R}^d$  上を移動するのに対し, (9) ではプレイヤーである通勤者は無限の期間  $[0, \infty)$  で有界な区間  $[0, 1]$  上を移動している. また, (9) では無限の期間での通勤者の行動を考えているので終端コストは考えられていない.

## 5 まとめ

通勤者の行動について MFG の観点からモデル化し, MFE (9) が得られた. また, MFE (1) と (9) で考えられている空間および時間に関する相違点を述べた. 本稿では通勤コストを考えるときに, 混雑コストにおいて関数  $F$  に具体的な関数を与えておらず, 延着コストおよび早着コストの単位時間あたりにかかるコストをいずれも  $c$  としている. 今後の課題として関数  $F$  と延着コスト, 早着コストの単位時間あたりのコストについて考える必要がある. また, 混雑を緩和するための運賃システムを考えるにあたり, 単位距離あたりの賃率を定める関数  $f$  によって通勤者の行動および通勤者の密度がどのように変化するかを調べ, 混雑が緩和される運賃システムの構築を目指す.

## 参考文献

- [1] 国土交通省. 東京圏の鉄道路線の遅延「見える化」(平成 30 年度). 2020. URL : <https://www.mlit.go.jp/report/press/content/001328948.pdf>
- [2] Pierre Cardaliaguet. Notes on Mean Field Games (from P.-L. Lions' lectures at Collège de France). Technical report, 2012.
- [3] Shigeaki Koike. A Beginner's Guide to the Theory of Viscosity Solutions (MSJ Memoirs 13, Mathematical Society of Japan). 2004.