

ASEP に対応する可積分系の数理構造

石黒裕樹¹, 佐藤純², 西成活裕³

¹ 東京大学大学院 工学系研究科 航空宇宙工学専攻

² お茶の水大学 ソフトマター教育研究センター

³ 東京大学 先端科学技術研究センター

概要

非対称単純排他過程 (ASEP) は, 非平衡輸送現象を記述する 1 次元確率過程モデルであり, 可解性といった豊かな数理構造をもつ. ASEP は別の可積分系との対応関係が知られている. 可積分な偏微分方程式である Burgers 方程式を ASEP から導出することができる. また, 可積分場の理論である微分型非線形シュレディンガー方程式 (DNLS) との対応も示唆されている. 本研究では, これらの可積分系間の対応関係を調べ, DNLS から Burgers 方程式が導出される事を示した.

Relationship among integrable systems related to the asymmetric simple exclusion process

Yuki Ishiguro¹, Jun Sato², Katsuhiro Nishinari³

¹ Department of Aeronautics and Astronautics, School of Engineering, The University of Tokyo.

² Research and Education Center for Soft matter, Ochanomizu University.

³ Research Center for Advanced Science and Technology, The University of Tokyo.

Abstract

The asymmetric simple exclusion process (ASEP) is a one-dimensional stochastic model, which describes nonequilibrium transport phenomena and has rich mathematical properties, such as solvability. The ASEP is related to two integrable systems: the Burgers equation, which is a classical integrable equation, and the derivative nonlinear Schrödinger equation (DNLS), which is also an integrable field equation. In this paper, we investigate these relations and present a derivation of the Burgers equation from the DNLS.

1 はじめに

非対称単純排他過程 (Asymmetric simple exclusion process: ASEP) は, 排除体積効果をもつ粒子が, 1 次元格子上を左右非対称なレートで拡散していく確率過程モデルである [1]. ASEP は単純なモデルでありながら, 様々な物理現象をよく再現し, 同時に豊かな数理構造を持つため, 非平衡輸送現象を記述する基本的な数理モデルとして盛んに研究されている. ASEP では, 境界における粒子の流出入レートに対して, 流れの相転移 (自由相/渋滞相/最大流量相) が起こる. この相転移が, 高速道路の渋滞をよく再現することなどから, 交通流を記述する数理モデルとして活用されている [2]. 他にも, 生体内の輸送現象や界面成長のダイナミクス等, 多様な物理現象へ応用されている. ASEP は, 多彩な非平衡現象を再現することに

加えて、可解であるという著しい性質を持つ。行列積の方法やベータ仮設法によって、定常状態やダイナミクスの厳密な解析が可能である事が知られている [3, 4].

本研究では、ASEP と関連する可積分系の対応関係を考察する。ASEP から可積分な偏微分方程式である Burgers 方程式が導出される事が知られている [5]. 一方で、可積分場の理論である微分型非線形 Schrödinger 方程式 (Derivative nonlinear Schrödinger equation: DNLS) との対応も示唆されている [6]. しかし、DNLS と Burgers 方程式との対応関係は未解明であった。本論文では、Burgers 方程式が DNLS から直接導出可能であることを示す [7]. また、DNLS を経由した導出法では、自然に ASEP の有限粒子補正項を含む事も併せて紹介する。

2 ASEP

ASEP は、粒子が左右非対称なレートでホッピングする、1次元格子模型である。ASEP の模式図を図 1 に示す。各粒子は微小時間 dt 間に、右 (左) へ確率 $pdt(qdt)$ で移動する。また、各粒子は排除体積効果を持ち、ホッピング先に既に粒子がいる場合には、ホッピングは起こらない。以下では、周期的境界条件を考え、サイト数は L とする。 j 番目のサイトの状態 $|n_j\rangle$ は、粒子がない (いる) 場合を $|0\rangle(|1\rangle)$ とし、2次元ベクトルで表される。ある時刻 t における系の状態ベクトルは、正規直交基底を $|n\rangle = |n_1, n_2, \dots, n_L\rangle$ とし、

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n \psi(n, t) |n\rangle \quad (1)$$

と書ける。ここで $\psi(n, t)$ は、時刻 t に粒子配置が $n = (n_1, n_2, \dots, n_L)$ となる確率を表す。ASEP の時間発展は、以下のマスター方程式 (虚時間形式の Schrödinger 方程式)

$$\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = -\hat{\mathcal{H}}_{\text{ASEP}} |\psi(t)\rangle \quad (2)$$

によって記述される。ハミルトニアン $\hat{\mathcal{H}}_{\text{ASEP}}$ は、

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{ASEP}} = \sum_{j=1}^L [-p\hat{s}_j^+ \hat{s}_{j+1}^- - q\hat{s}_j^- \hat{s}_{j+1}^+ + p\hat{n}_j(1 - \hat{n}_{j+1}) + q(1 - \hat{n}_j)\hat{n}_{j+1}] \quad (3)$$

と表される。ただし、昇降演算子 \hat{s}_j^\pm 、及び数演算子 \hat{n}_j は、パウリ行列 $\hat{\sigma}_j^{x,y,z}$ を用いて $\hat{s}_j^\pm = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_j^x \pm i\hat{\sigma}_j^y)$, $\hat{n}_j = \frac{1}{2}(1 - \hat{\sigma}_j^z)$ と定義される演算子である。射影状態 $\langle s| = \langle 0| \exp\left(\sum_{j=1}^L \hat{s}_j^+\right) = \sum_n \langle n|$ を導入すると、任意の物理量 \hat{A} の期待値は $\langle \hat{A} \rangle = \langle s|\hat{A}|\psi(t)\rangle$ と書ける。以上のことから、粒子密度の時間発展方程式

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{n}_i \rangle = p\langle \hat{n}_{i-1} \rangle + q\langle \hat{n}_{i+1} \rangle - (p+q)\langle \hat{n}_i \rangle + (p-q)\langle \hat{n}_i(\hat{n}_{i+1} - \hat{n}_{i-1}) \rangle \quad (4)$$

を導出できる。

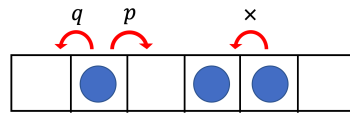


図 1: ASEP の模式図

3 ASEP と Burgers 方程式の対応

本研究で提案する DNLS を経由した Burgers 方程式の導出との比較の為、ここでは従来の導出法について簡単にレビューする [5]. 前節で導出した、粒子密度の時間発展方程式 (4) に対し、平均場近似を行い、連続極限をとると Burgers 方程式が導出される. 初めに、式 (4) の右辺第 3 項 $\langle \hat{n}_i (\hat{n}_{i+1} - \hat{n}_{i-1}) \rangle$ を $\langle \hat{n}_i \rangle \langle \hat{n}_{i+1} - \hat{n}_{i-1} \rangle$ に置き換え、粒子間の相関を無視する近似を行う.

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{n}_i \rangle = p \langle \hat{n}_{i-1} \rangle + q \langle \hat{n}_{i+1} \rangle - (p+q) \langle \hat{n}_i \rangle + (p-q) \langle \hat{n}_i \rangle \langle \hat{n}_{i+1} - \hat{n}_{i-1} \rangle. \quad (5)$$

次に、連続極限 $\langle \hat{n}_j \rangle \rightarrow \rho(x_j, t)$ を考え、時間を $at \rightarrow t$ とリスケールすると、Burgers 方程式

$$\partial_t \rho = aD \partial_x^2 \rho - 2\alpha \rho + 4\alpha \rho \partial_x \rho \quad (6)$$

が導出される.

4 DNLS と Burgers 方程式の対応

本節では、微分型非線形 Schrödinger 方程式 (DNLS) から Burgers 方程式が直接導出される事を示す. DNLS 型のハミルトニアン

$$-\hat{\mathcal{H}}_{\text{DNLS}} = a^2 D \int dx \hat{\psi}^\dagger \partial_x^2 \hat{\psi} - 2a\alpha \int dx \hat{\psi}^\dagger \partial_x \hat{\psi} - 2a^2 \alpha \int dx \hat{\psi}^\dagger (\partial_x \hat{\psi}^\dagger) \hat{\psi} \hat{\psi} \quad (7)$$

に従って時間発展する系を考える. ここで、 $\hat{\psi}, \hat{\psi}^\dagger$ は場の演算子であり、交換関係 $[\hat{\psi}(x), \hat{\psi}(y)] = [\hat{\psi}^\dagger(x), \hat{\psi}^\dagger(y)] = 0, [\hat{\psi}(x), \hat{\psi}^\dagger(y)] = \delta(x-y)$ を満たす. 3 節と同様に、境界条件は周期的境界条件とする. DNLS は、可積分系であり、また ASEP との対応関係が示唆されている [6, 8]. 特に、 $\hat{\mathcal{H}}_{\text{DNLS}}$ 内のパラメータ a を $a = 1/L$ とした時、サイト数 L の ASEP と対応づけられる. 運動方程式は

$$\partial_t \hat{\psi}(x, t) = a^2 D \partial_x^2 \hat{\psi}(x, t) - 2a\alpha \partial_x \hat{\psi}(x, t) + 4a^2 \alpha \hat{\psi}^\dagger(x, t) \hat{\psi}(x, t) \partial_x \hat{\psi}(x, t) \quad (8)$$

と書ける. 以下で、運動方程式 (8) から、Burgers 方程式が導出される事を示す.

N 粒子状態の正規直交規定 $|x_1, \dots, x_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \hat{\psi}^\dagger(x_1) \dots \hat{\psi}^\dagger(x_N) |0\rangle$ を導入し、状態ベクトルを

$$|f\rangle = a^{\frac{N}{2}} \int dx_1 \dots dx_N f(x_1, \dots, x_N) |x_1 \dots x_N\rangle \quad (9)$$

と表す. $f(x_1, \dots, x_N)$ は、 N 粒子分布関数である. 任意の時刻 t での状態ベクトルは $|f, t\rangle = e^{-\hat{\mathcal{H}}_{\text{DNLS}} t} |f\rangle$ と書ける. 2 節と同様に、射影状態 $|s\rangle = e^{\hat{X}} |0\rangle$, $\hat{X} = \int dx a^{-\frac{1}{2}} \hat{\psi}^\dagger(x)$ を導入すると、任意の物理量 \hat{A} の期待値は $\langle \hat{A} \rangle = \langle s | \hat{A} | f, t \rangle$ と表される. また、次の関係式

$$\hat{\psi}(x) |s\rangle = a^{-\frac{1}{2}} |s\rangle \quad (10)$$

が成立する. すなわち、射影状態 $|s\rangle$ は消滅演算子 $\hat{\psi}$ の固有値 $a^{-\frac{1}{2}}$ の固有ベクトルになっている.

以上をふまえて、式 (8) を変形する. 粒子密度分布関数 $\rho(x, t) = \langle s | \hat{\rho}(x) | f, t \rangle = a^{-\frac{1}{2}} \langle s | \hat{\psi}(x) | f, t \rangle$ を導入し、式 (8) に左から射影状態 $\langle s |$, 右から状態ベクトル $|f, t\rangle$ を作用させると、

$$a^{\frac{1}{2}} \partial_t \rho(x, t) = a^{\frac{5}{2}} D \partial_x^2 \rho(x, t) - 2a^{\frac{3}{2}} \alpha \partial_x \rho(x, t) + 4a^{\frac{3}{2}} \alpha \langle s | \hat{\psi}(x) \partial_x \hat{\psi}(x) | f, t \rangle \quad (11)$$

となる. 次に、 N 粒子分布関数を 1 粒子分布関数の積で

$$f(x_1, \dots, x_N, t) \sim \prod_{j=1}^N f(x_j, t) \quad (12)$$

と近似する. すると, 式 (11) の右辺第 3 項は

$$\langle s|\hat{\psi}(x)\partial_x\hat{\psi}(x)|f,t\rangle\sim\partial_x\left[\binom{N}{2}f(x,t)^2\right]=\frac{N-1}{N}\rho(x,t)\partial_x\rho(x,t) \quad (13)$$

となる. 時間を $at \rightarrow t$ とリスケールすると, 式 (11) から, Burgers 方程式

$$\partial_t\rho=aD\partial_x^2\rho-2\alpha\partial_x\rho+4\alpha\frac{N-1}{N}\rho\partial_x\rho \quad (14)$$

が導出される.

3 節において ASEP から導出した Burgers 方程式 (6) と, DNLS から導出した Burgers 方程式 (14) を比較してみると, 右辺第 3 項の係数に違いがある事が確認される. DNLS から導出した Burgers 方程式 (14) の右辺第 3 項には, $(N-1)/N$ という係数があるが, これは ASEP の有限粒子補正項という意味を持つ. 2 節で紹介した方法では, 熱力学的極限を考えている為, 粒子数 N が無限である事が前提となっている. 実際, DNLS から導出した式 (14) に対して, 粒子数無限大の極限をとる事で, 式 (6) が導出される. 式 (14) の右辺第 3 項の係数 $(N-1)/N$ が有限粒子補正項と対応する事の詳細の議論は,[7] を参照頂きたい.

5 まとめ

本研究では, ASEP と関連する可積分系間の数理解造を調べた. 初めに, ASEP の定式化を行い, 平均場近似, 及び連続極限をとる事で, 可積分偏微分方程式である Burgers 方程式が導出されることをレビューした. 次に, 可積分場の理論である DNLS を導入し, 運動方程式から Burgers 方程式が導出される事を示した. また, DNLS から導出された Burgers 方程式を ASEP から導出されたものと比較し, DNLS から導出されたものは ASEP の有限粒子補正項が含まれる事を紹介した. 本研究によって, 可積分確率模型 (ASEP) ・量子可積分系 (DNLS) ・古典可積分方程式 (Burgers 方程式) という 3 つの可積分系間の対応関係が明確になった. 今後, これらの数理解造を用いることで, 可積分系の量子古典対応等の理解の進展に貢献できる事を期待している.

参考文献

- [1] B. Derrida, Phys. Rep **301** 65 (1998)
- [2] A. Schadschneider, Physica. A **285** 101 (2000).
- [3] R. A. Blythe and M. R. Evans, J. Phys. A **40** R333 (2007).
- [4] O.Golinelli and K. Mallick, J. Phys. A **39** 12679 (2006).
- [5] 笹本智弘, 物性研究, **79** 5 881 (2003)
- [6] T. Sasamoto and M. Wadati, J. Phys. Soc. Jpn **67** 3 784 (1998).
- [7] Y. Ishiguro, J. Sato and K. Nishinari, arXiv:2005.03715 (2020).
- [8] A. Kundu and B. Basu-Mallick, J. Math. Phys **34** 1052. (1993).