

SIR ダイナミクスにおける感染率の定義の違いが 最終感染者サイズに及ぼす影響

内海 忍, 谷本 潤
九州大学 工学部 エネルギー科学科
九州大学院 総合理工学研究院 環境理工学部門

概要

Small-world 上を SIR プロセスに従い伝搬する感染症ダイナミクスを Multi Agent Simulation により解析した。MAS 上で付与する感染率を、既往の vaccination game の MAS 解析で用いられてきた定義に依る場合と、一人の infectious エージェントがリンク 1 本先の隣人を単位時間に感染させる確率で定義する場合とで比較した。short-cut 確率、平均次数を変えながら比較計量したところ、前者定義では、最終感染者サイズ、ピーク感染者サイズともに後者定義による結果より過大評価される。後者の定義による結果では、short-cut 確率が大きくなるほど、平均次数が大きくなるほど、ピーク感染者サイズが大きくなるとの妥当な感度が再現された。この結果は、感染率の定義を従来の MAS による vaccination game で頻用されてきた F_u の定義に依るか、リンク 1 本あたりの感染率に依るかにより大きく異なることが明らかとなった。

Influence from different definition of 'transmission rate' for SIR process on final epidemic size

Shinobu Utsumi^{*1}, Jun Tanimoto^{*2}

^{*1} Undergraduate School of Engineering, Kyushu University

^{*2} Faculty of Engineering Sciences, Kyushu University

Abstract

By means of multi agent simulation; MAS, approach, presuming Small world (SW) networks, the sensitivity resulting from average degree, i.e., density of links in other words, and short-cut probability affecting on final epidemic size (FES) as well as peak infection size was explored. Besides the effective transmission rate by F_u 's concept in his vaccination game model, we newly introduced the equivalent transmission rate that literally indicates how a single infectious person communicating his disease to a neighboring agent on one of the links during an unit time (day). Our result reveals that the effective transmission rate by F_u 's concept overestimates both FES and peak infection size. In contrast, the equivalent transmission rate well-reproduces that the increase of average degree or/ and the increase of short-cut probability pushes up the peak infection size.

1.緒言

日本における COVID-19 の初期伝搬過程には、感染能力を有するが自覚症状を持たない中国からの旅行者がトリガーになった可能性が高い。ワクチンや抗ウイルス剤等の医療対

処策が十全でない未知の感染症に対しては、伝搬初期段階で感染者を検知すること（そして適切に隔離すること）が、封じ込めの可否に大きく影響する。ところで、人間の複雑社

会ネットワークの基本的特徴として Small-world 性と次数分布の scale-free 性が知られているが、有限ノードで構成されるこれらのトポロジー上での SIR や SEIR プロセスには解析解がないので、Multi-agent simulation (以下、MAS) を適用して統計的に評価する必要がある。MAS により感染ダイナミクスを解析するに際しては、基本再生産数の定義との整合性から感染率をどう付与するかは、大きな問題である。既往では、Fu[1]の vaccination game の定義による方法が多く踏襲されているが、これはリンク 1 本あたりの隣人を感染させる効率との概念が反映されておらず、物理的には疑問が残る。本論では、これとは異なる定義を示し、基盤グラフを Small-world にとって、最終感染者サイズを計量する事で、上記の定義の違いを検討した。なお、Small-world を仮定するのは、short-cut が前記の旅行者の持ち込むウィルスの影響を模擬しているとの認識による。

2. モデル

2.1 Small-World (SW) ネットワーク

Watts と Strogatz[2]による WS-SW モデルに依った。但し、short-cut 確率 $p=0$ では 2次元格子グラフ (次数 $k=8$ ならば Moore 近傍を有する 2次元ラチス) を、 $p=1$ では次数分布がポアソン分布となる Erdős-Rényi グラフ [3] を再現する。

2.2 感染症伝搬ダイナミクスのモデル

感染症伝搬は Kermack & McKendrick[4]による SIR (Susceptible-Infectious-Recovered) ダイナミクスに従うとした。すなわちグラフ上のノードであるエージェントは、初期感染エージェントを除き、感染可能性に応じて、感受性エージェント S、感染エージェント I、回復エージェント (免疫獲得エージェント) R の 3クラスの順に確率的に推移する。R は完全免疫を仮定し、2度目の感染は起きないとした。従って、譬えグラフサイズ全域に及ぶ感染症大流行が起きたとしても、十分な時間経過ののちには、系内には I エージェントは存在しなくなる。この時点をもって、均衡と定義する。MAS 上で空間構造のある SIR ダイナミクスを模擬するにあたっては、その確率過程を

精度良く再現するために Gillespie 法[5] を用いた。空間上にランダムに配置する初期感染者 (その数 I_0) の影響と伝搬過程の確率性に対してロバストな結果を担保するため、ある条件設定に対して 100 試行のアンサンブル平均をもって評価を行う。

著者らの一連の vaccination game に関する研究 (例えば、[6][7]) に倣って、基本再生産数 $R_0 = 2.5$ 、平均回復日数の逆数を意味する回復率を $\gamma = 1/3[\text{day}^{-1}]$ と仮定した。この値は季節性インフルエンザに特徴的な仮定値とされおり、COVID-19 を必ずしも模擬した設定とはなっていない。

R_0 と γ を決めることで自動的に定まる感染率は、 $\beta = R_0 \cdot \gamma = 0.833$ となる。但し、この β は、SIR 過程を well-mixed かつ無限集団を仮定した平均場近似を適用した場合の ODE (常微分方程式) モデル (例えば、[8]) に対応した定義である。空間構造すなわち有限サイズの基盤グラフ上を想定した MAS では、この β とは異なる、Gillespie 法に対応した、いわばリンク 1 本あたりの感染率を定義する必要がある。この点に関しては、エージェントのワクチン接種にまつわる意思決定を取り込んだ vaccination game において、Fu[1]らによる有効感染率 (以下、 β_{eff} とする) の考え方が広く受け入れられている。 β_{eff} は以下のように同定する。SIR プロセスの ODE モデルでは、解析解が得られており、 R_0 を所与とすれば、 R_0 に関する超越方程式を求解することで FES が定まる。 $R_0 = 2.5$ に対するそれは 0.8962 である。MAS で解析する空間構造がある系に対して、 β_{eff} を 0 から徐々に上げていくと、アンサンブル平均を採った FES がこの 0.8962 にクロス (一致) する β_{eff} を数値的に決めることができる。これが、Fu らが提案した β_{eff} (以下、有効感染率) の定義である。従って、この β_{eff} は概念的にはリンク当たりの感染率であるにも関わらず、トポロジーにより異なる値をとる。のみならず、同じトポロジーでもドメインサイズが異なれば、また特に SW では short-cut 確率が異なれば、異なる β_{eff} となる。これは、物理的にはやや解釈に窮するが、ワクチン接種などの処置を採らない、自然下の感染に任

せていれば、譬えトポロジーが異なると、その FES は ODE モデルが規定する解析解に常に一致するとの仮定から来ている。本論では、この Fu のコンセプトに依拠する有効感染率と並んで別定義のリンク当たり感染率として相当感染率（以下、 β_{eq} とする）を次式で定義する

$$\beta_{eq} = \frac{R_0 \cdot \gamma}{\langle k \rangle}$$

ODE モデルでは系内人口が 1 に基準化されている点を踏むならば、この定義は $\beta = R_0 \cdot \gamma$ をリンク数当たり換算しているものである。 β_{eff} がリンク当たりの概念が曖昧なのに対して、 β_{eq} は $[\text{day}^{-1}\text{person}^{-1}\text{link}^{-1}]$ を物理単位とする定義になっている。

3. 結果及び考察

MAS による数値実験では、 β_{eff} と β_{eq} の異なる感染率定義に対して、SW の short-cut 確率を変えながら、また平均次数を変えながら、試行 100 回のアンサンブルと採って、FES とピーク感染者サイズを計量した。結果を Fig.1 に示す。なお、サイズ N は 10^4 粒子、初期感染者数 I_0 は 5 とした。左カラムが Fu による有効感染率による結果、右カラムがここで提示した相当感染率による結果である。上段は夫々 β_{eff} と β_{eq} を示す。右カラム上段の β_{eq} のヒートマップは、上記の定義からして short-cut 確率に依らない。中段は FES、下段はピーク感染者サイズ（各エピソード時間発展中のピーク感染者サイズを 100 アンサンブル平均採った値）である。

Fig.2 は $N=9 \times 10^4$ 粒子、 $I_0=45$ の結果である。初期感染率密度を Fig.1 と同様として、純粹にドメインサイズの影響を比較するために描いた。まず、この点を考察する。Fig.1 と Fig.2 の各パネルを比較すると、Fig.2 の方が short-cut 確率に対する感度、平均次数に対する感度ともに Fig.1 より滑らかに見えるけれど、大略、大きな特性差は観察されない。つまり、粒子数 1 万程度の MAS で、系の有限性の影響は有

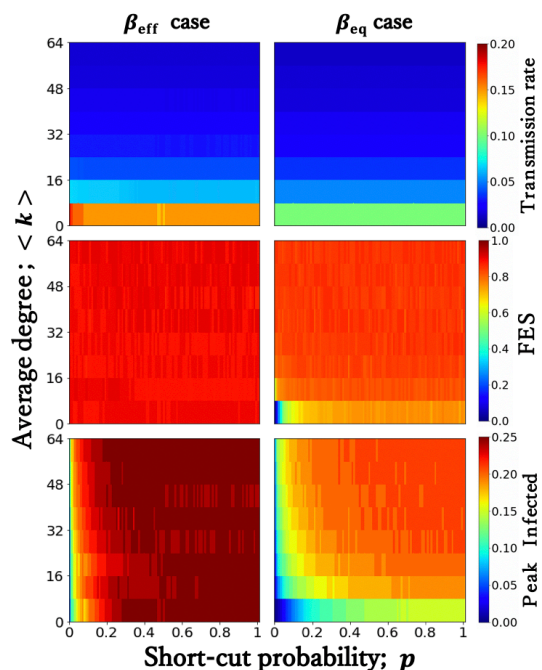


Fig. 1 MAS による結果. 左カラムは有効感染率 β_{eff} , 右カラムは相当感染率 β_{eq} による. 上段は β_{eff} (左) および β_{eq} (右), 中段は最終感染者サイズ, 下段はピーク感染者サイズ. $N = 1 \times 10^4$.

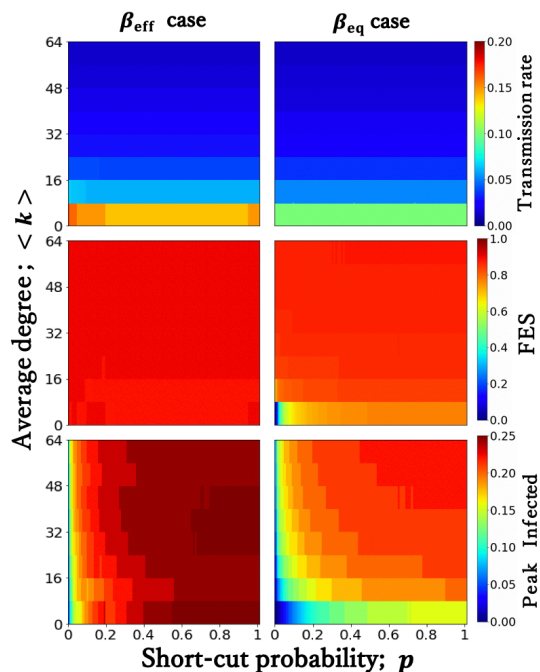


Fig. 2 MAS による結果. 左カラムは有効感染率 β_{eff} , 右カラムは相当感染率 β_{eq} による. 上段は β_{eff} (左) および β_{eq} (右), 中段は最終感染者サイズ, 下段はピーク感染者サイズ. $N = 9 \times 10^4$.

意でなくなると云える。

Fig.1, Fig.2 共通で各パネルの特性を見ていこう。まず、 β_{eff} と β_{eq} の差異は、空間型囚人のジレンマゲームなどで仮定される平均次数10前後のレベルでは、大きく異なる。現実の感染症伝搬で想起される平均次数はそれよりは大きいと思われるが、平均次数増大ともに β_{eff} と β_{eq} には顕著な差異はなくなる。これによりパネル上方領域でのFESやピーク感染者サイズもどちらの感染率の定義によっても大差はなくなる。

FES, ピーク感染者サイズともに β_{eff} では β_{eq} より大きな値を示す。仮に β_{eq} による結果がリンク当たり感染率をより忠実に模擬しているのだとすると、Fuのコンセプトによる β_{eff} では過大予測をもたらすことになる。また、 β_{eff} のFESがshort-cut確率と平均次数に感度を持たなくなるのは、 β_{eff} の定義からして当然の帰結である。 β_{eq} では次数8でshort-cut確率に感度を持つが、大きな次数では β_{eff} 同様ほぼ無感度である。

大きな特性差が露わとなるのは、ピーク感染者サイズである。 β_{eq} ではshort-cut確率が大きくなるほどに、また平均次数が大きくなるほどに大きなピーク感染者サイズとなるが、 β_{eff} では次数に対する感度は大きく出ない。感染症伝搬プロセスを考えると、平均次数が大きくなれば、爆発的感染が起きる可能性が高くなるから、ピーク感染者サイズが高くなる β_{eq} による結果の方がより適切に現実を模擬していると云えよう。

4. 結言

Small-world上をSIRプロセスに従い伝搬する感染症ダイナミクスをMulti Agent Simulationにより解析した。MAS上で付与する感染率を、既往のvaccination gameのMAS解析で用いられてきたFuの定義に依る場合、一人のinfectiousエージェントがリンク1本先の隣人を単位時間に感染させる確率で定義する場合とで比較した。short-cut確率、平均次数を変えながら比較計量したところ、Fuの

定義では、最終感染者サイズ、ピーク感染者サイズともに後者の定義による結果より過大評価することが示唆された。対して、後者の定義による結果では、short-cut確率が大きくなるほど、また平均次数が大きくなるほど、ピーク感染者サイズが大きくなるとの妥当な感度が再現された。以上より、Fuによる有効感染率よりも、本稿で示した相当感染率の方がより適切であることが示唆された。

謝辞

本研究の一部は科研費 国際共同研究(B)(19KK0262) 基盤研究(B)(20H02314), 挑戦的研究(萌芽)(20H02314A)による記して謝意を表す。

参考文献

- [1] Fu, F., Rosenbloom, D. I., Wang, L., Nowak, M. A.; Imitation dynamics of vaccination behaviour on social networks, *Proceedings of the Royal Society B*, **278**, 42–49, 2011.
- [2] D. J. Watts, S. H. Strogatz; Collective dynamics of ‘Small-World’ networks, *Nature*, **393(6684)**, 440–442, 1998.
- [3] Erdős P, Rényi A.; On random graphs. I., *Publicationes Mathematicae*, **6**, 290–297, 1959.
- [4] Kermack, W. O., McKendrick, A. G.; A contribution to the mathematical theory of epidemics, *Proceedings of the Royal Society of London A* **115(772)**, 700–721, 1927.
- [5] Gillespie, D. T. J.; Exact stochastic simulation of coupled chemical reactions, *Journal of physical chemistry*, **81(25)**, 2340–2361, 1977.
- [6] Fukuda, E., Tanimoto, J.; Effects of stubborn decision-makers on vaccination and disease propagation in social networks, *International Journal of Automation and Logistics*, **2**, 78–92, 2016.
- [7] Fukuda, E., Kokubo, S., Tanimoto, J., Wang, Z., Hagishima, A., Ikegaya, N.; Risk assessment for infectious disease and its impact on voluntary vaccination behavior in social networks, *Chaos, Solitons & Fractals*, **68**, 1–9, 2014.
- [8] Arefin, M. R., Tanaka, M., Kabir, K. M. A., Tanimoto, J.; Interplay between cost and effectiveness in influenza vaccine uptake: a vaccination game approach, *Proceedings of the Royal Society A*, **475**, 20190608, 2019.