

一次元周期系上の採餌運動の拡散係数

島田尚^{1,2}, 大平徹³

¹ 東京大学 数理・情報研究教育センター

² 東京大学 工学系研究科システム創成学専攻

³ 名古屋大学 多元数理科学研究科

概要

一次元周期系にランダムに配置されたターゲット（餌）のうち、現在地から最も近いものまで移動して採餌するという簡単なモデルを提案し、ターゲットの移動の性質について調べた。このモデルにおける単一の採餌者は、餌の数 N が 1 のときは正常拡散運動を、 $N \rightarrow \infty$ の極限では一方向への運動をする。有限の N の場合についてシミュレーションでしらべたところ、 $N = 27$ 付近に採餌者の拡散係数が最小点を持つことが分かった。

Diffusion constant of a forager on a one-dimensional periodic system

Takashi Shimada^{1,2} & Toru Ohira¹

¹ Mathematics and Informatics Center, The University of Tokyo

² Department of Systems Innovation, School of Engineering, The University of Tokyo

³ Graduate School of Mathematics, Naoya University

Abstract

We introduce a simple model of foraging, in which a forager and N preys are distributed randomly on a periodic one dimensional space and the forager moves to its nearest prey. While the motion of the forager for the case of $N = 1$ is characterized by the normal diffusion, it yields a ballistic motion in the case of $N \rightarrow \infty$. Systematic simulation on the systems with finite N reveal that the diffusion constant of the forager takes a minimum at around $N = 27$.

1 はじめに

オンデマンドバスや Uber、荷物の集配など、空間に分布したタスクに対処するというタイプの問題に関連した課題が多くなってきている。類似の問題を生物系に探すとすると、目標とするタスクの位置が動かないという点で追跡・逃走の問題 [1, 2] というより採餌 (Foraging) 行動の問題により近いと言える [3]。この採餌の問題についても、バイオロギング技術の進歩などにより、最適な行動原理やその結果として現れるレヴィフライト的な移動の様子などについて研究が深まってきている [4]。これらの問題に

おける Foraging のアルゴリズムの効率などについて考える際の基準となる現象を考えたい、というのが本論文の目的である。

2 モデル

2.1 設定

以下では図 1 に示すような非常に簡単な採餌モデルを考える。空間は周期的境界条件を課した一次元系とし、表記の簡単のため一周の長さを 1 とする。この上に住む採餌者は「自分に最も近い餌まで移動してその餌を食べる（集荷などのタスクをこなす）」

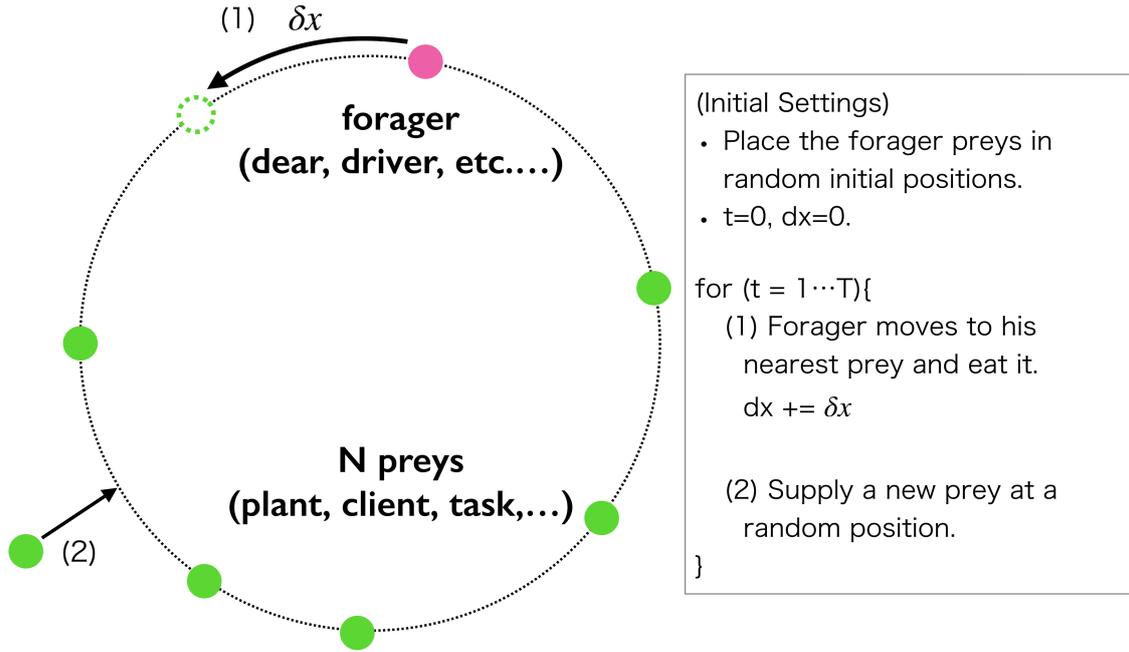


図 1: 本論文で扱う Foraging モデル。初期状態として「採餌者」(forager)1 体とその餌 (prey) N 体を一次元リング上にランダムに配置したのち、(1) forager を再近接の prey まで動かしその prey を消す (食べる) (2) prey 1 体をランダムな位置に補充する という過程を繰り返す。

という最も簡単な動きをするものとする。餌は動かないが、「草が生える」、「新しい注文が発生する」等に対応した過程として、時間的に新しく発生するものとする。この過程についても、「餌が 1 体食べられる毎に 1 体の餌が全くランダムな位置に補充される」という最も簡単な場合を考えよう。また、この一定に保たれる餌の数を以下 N とする。

この設定の上で、採餌者がどのような動きをするか (または、同じことであるが、餌がどのように食べられるか) を問題としよう。

2.2 $N = 1$ の場合

上の設定が最も簡単であると言える理由は、 $N = 1$ の場合を考えると分かりやすい。採餌者は一次元リングに沿って餌に近い方に時計回り (この方向を以下 $\delta x > 0$ ととる) もしくは反時計回り ($\delta x < 0$) の移動をして系の唯一の餌を“食べ尽くし”、これに引き続いて全くランダムな位置に新しい餌が追加されることから、採餌者の毎ステップの運動は独立である。すなわち、採餌者の運動は一次元ランダムウォークに他ならない。また、この毎ステップの独立なウォーク δx の変位、歩幅、分散の期待値はそ

れぞれ以下のように求まる：

$$\langle \delta x \rangle = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x dx = 0, \quad (1)$$

$$\langle |\delta x| \rangle = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |x| dx = 2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}, \quad (2)$$

$$\langle \delta x^2 \rangle = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{12}. \quad (3)$$

2.3 $N \rightarrow \infty$ の場合

結果が容易に分かるもう一つの状況として、 $N \rightarrow \infty$ の極限が考えられる。この極限では、餌の点の分布の代わりに餌の分布密度を考えるのが自然であろう。今、採餌者が例えば正の方向に移動しているとす。採餌者が直近に通過してきた区間には餌は少ない (つい最近に偶然に降ってきたものだけ) のに比較して、前方には餌が濃く分布しているので採餌者は現在の運動方向に進み続けることになる。つまり、この極限での採餌者は、餌の分布に駆動されていわば樟脳舟のようにバリスティックな運動を続けることになる。

2.4 有限の N の場合

以上の例から分かるように、この簡単なモデルにおける採餌者の運動は N の増大と共に「正常拡散」→「等速運動」と変化すると考えられるわけであるが、ではこれら両極端の間をつないでいる「有限の N の系」ではどのような振る舞いが見られるのだろうか？このケースについて、次の章でシミュレーションによって調べよう。

3 結果

3.1 採餌者の運動の軌跡

有限の N の場合の採餌者の運動の軌跡の例を図2に示す。横軸としてスケールされた採餌ステップ数：

$$\tilde{t} = \frac{t}{N} \quad (4)$$

をとっていることに注意されたい。餌間の典型的な距離が $1/N$ でスケールすることから、このスケールされたステップ数 \tilde{t} は採餌のための移動速度一定の場合の経過時間に大体対応すると思っても良い。運動の軌跡からまず分かることは、 N を大きくしていくと共に確かに ($N \rightarrow \infty$ の極限のように) 連続して同じ方向へ移動することが増えるということである。しかしながら、ランダムに餌を補充するというモデルの設定からも自然に期待されるように、十分に長い時間スケールでみれば採餌方向のターンはランダムに起こり、すなわち運動の軌跡は“複数ステップを平均の歩幅としたランダムウォーク”様である。特に N が大きい領域では、同一方向へ連続して移動する回数の伸びは N より速い。このことは例えば $N = 300$ の軌跡が“大きな歩幅”であることに表れている。この傾向は上述の $N \rightarrow \infty$ での等速運動へとつながるものとして理解できる。一方で、 $N < 100$ の場合についてはこの平均自由行程の伸びがどのようなものであるかこのようなプロットからは明らかでない。

3.2 拡散係数の餌数 N 依存性

上で述べた様に、有限の N に対して十分に大きなステップ数の領域でみれば採餌者の運動はランダムウォークとみなせる。そこで、有限の N での上述の「ターン」の頻度をより詳細に特徴付けるために運動の軌跡を初期位置からの変位

$$dx(t) = \sum_{\tau=1}^t \delta x(\tau) \quad (5)$$

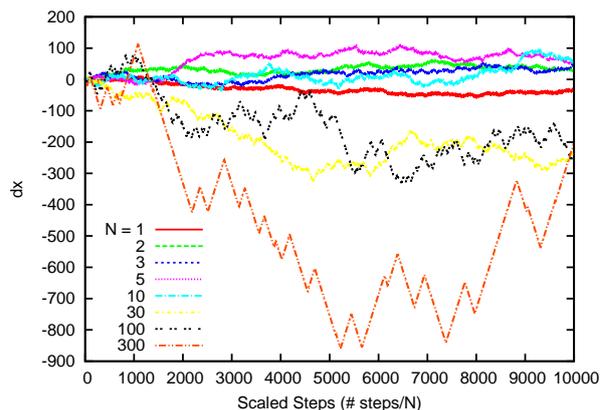


図2: 採餌者 (forager) の移動軌跡の例。横軸はスケールされたステップ数: $\tilde{t} = t/N$ 、縦軸は始点からの変位 $dx(t)$ である。引き続いて同じ方向へ移動する回数が、 $N \leq 30$ の領域では N 程度で、 N がより大きい領域では N より速く増加していることがうかがえる。

から計算される 拡散係数：

$$D(N) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle [dx(t)]^2 \rangle}{t} \quad (6)$$

で評価することにする。但し、式中の t の極限は「そのパラメタで採餌者が充分多くの回数ターンするだけの長い時間」の意味である。ターンの回数は今考えている領域で大体 $1/N$ 程度で減少するので、この「長い時間」は N とともに線形かそれ以上にスケールしてとる必要がある。今回は $T = 10,000N$ ($\tilde{t}_{\max} = 10,000$) にとることにより、 $N \leq 100$ の系については実際に計算された拡散定数がこの最大ステップ数までに定常値に落ち着くことを確かめた。

この定義で計算された拡散係数の N 依存性を図3に示した。式(2)中で $\langle \cdot \rangle$ で表したアンサンブルアベレージは、 $N = 30$ までは1億試行、 $N \geq 35$ のケースについてはそれぞれ1000万試行から求めており、誤差はインセットで示した程度である (メインプロットではシンボルサイズより小さい)。また、 $N = 1$ の場合の拡散係数

$$D(1) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle \left[\sum_{\tau=1}^t \delta x(\tau) \right]^2 \rangle}{t} = \langle \delta x^2 \rangle = \frac{1}{12} \quad (7)$$

を基準として示してある。このプロットから、 $N > 100$ の領域での「平均自由行程の増大」に至る前の中間領域で、拡散係数が $N = 1$ の場合より小さい領域があるという興味深い事実が分かる。拡散係数

は $N = 2$ 以降減少し、 $N = 27$ 付近で最小値をとる (0.075618 ± 0.000011 , $N = 1$ の場合の約 9 割)。拡散係数はその後増加に転じ $N = 65$ 付近で $N = 1$ の水準を回復し、その後も単調に増加を続けこれが上述の軌跡で「大きな歩幅」として見られた振る舞いにつながってゆくと考えられる。

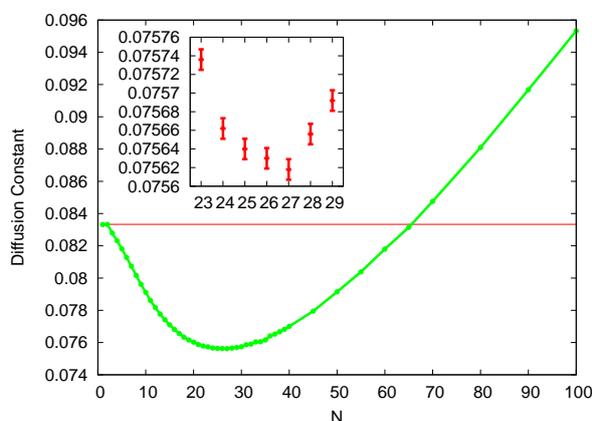


図 3: 拡散係数の N (餌の数) 依存性。比較の基準となる $N = 1$ の場合の拡散係数 ($1/12$) を図中に水平線で示した。インセットは拡散係数最小点近傍の拡大図で、縦横軸はメインプロットと同じく N と D である。

4 まとめと展望

非常に簡単な一次元上の採餌モデルにおいて、最寄りの餌を食べる (タスクをこなす) という行動の軌跡が長時間極限では拡散運動すること、またその拡散係数が餌の数 N につれて非単調な振る舞いをすることを明らかにした。設定の単純さに鑑みるとこの拡散係数の非単調な振る舞いは興味深く、解析的な手法を含めより詳細な理解が望まれる。また、今回報告した長時間極限での拡散的振る舞いへの漸近自体はある意味で逃れようの無い帰結であり、現実の問題との対応を考えても長時間極限に至る前より短いステップ数での振る舞いの解析の必要がある。実際、シミュレーションから短時間側では拡散係数がステップ数に依存する (=異常拡散) 領域が見えている。

また一方で、今回考えた「周期的 1 次元餌空間」はいかにも特殊である。その意味では、生物の採餌そのものよりはより抽象的な人や計算機のタスク処理過程に関連を探る方が妥当であるかもしれない。実空間での採餌や集配を念頭にした場合は 2 次元への拡張が自然な方向であるが、2 次元系では今回議

論した様な $N \rightarrow \infty$ でのバリスティック運動が出にくいなど性質が本質的に大きく違うようである。

参考文献

- [1] A. Kamimura and T. Ohira, *New J. Phys.* 12, 053013 (2010).
- [2] M. Masuko, T. Hiraoka, N. Ito, & T. Shimada, *J. of Phys. Soc. Japan Vol. 86*, 085002 (2017).
- [3] K. Bhattacharya & T. Vicsek, *J. R. Soc. Interface* 11: 20140674 (2014).
- [4] D. A. Raichlen *et al.*, *Proc. Nat. Acad. Sci.* 111(2):728-33 (2014).