

単純な道路ネットワークにおける都市交通の巨視的基本図

寺田健司^{1,2}, 吉岡直樹^{2,3}, 島田尚³, 伊藤伸泰^{3,2}

¹ 神戸大学大学院 農学研究科

² 理化学研究所 計算科学研究機構

³ 東京大学大学院 工学系研究科 物理工学専攻

概要

単純な並列道路網における巨視的基本図を解析的手法とシミュレーションにより調べた。△形の基本図を持つ道路から成る非線形回路モデルについて、巨視的基本図は道路の数と同数の山からなる不連続な関数形になることを見出した。一方、同じ道路構造について最適速度モデルのシミュレーションを行ったところ、都市交通での実際の観測により近い、連続的な巨視的基本図を得た。

Macroscopic fundamental diagram of urban traffic on simple street networks

Kenji Terada^{1,2}, Naoki Yoshioka^{2,3}, Takashi Shimada³ and Nobuyasu Ito^{3,2}

¹ Graduate School of Agricultural Science, Kobe University

² RIKEN Advanced Institute for Computational Science

³ Department of Applied Physics, Graduate School of Engineering, the University of Tokyo

Abstract

Macroscopic fundamental diagrams (MFDs) on simple street networks are studied analytically and numerically. We consider nonlinear circuit model that consists of road elements with piecewise linear fundamental diagram. We find that MFDs of the model are discontinuous and sawtooth-like. Meanwhile, simulations of optimal velocity (OV) model on the same street networks yield continuous MFDs, that are observed in real urban traffic.

1 はじめに

近年、都市交通研究のトピックの一つとして巨視的基本図というアイデアが注目を受けている [1]. これは、都市全体の平均車両密度と流量に注目すると、高速道路の基本図と同様に、その都市交通を特徴づけられる密度流量特性が得られるというものである。

我々は、このような都市交通における巨視的基本図を理解するために、単純な道路ネットワークを考え、そこで2つのモデルについて研究を行った。2章では以前我々が提案した非線形回路モデルについて、3章では最適速度モデルを用いたシミュレーションについて、巨視的基本図がどのようになるか議論す

る。最後に4章で本論文のまとめと展望を示す。

2 非線形回路モデル

2.1 モデル

今、図1のような、1個の頂点と N 本の辺を持つ有向グラフを考える。ここで、頂点を交差点、辺 $i = 1, \dots, N$ をその交差点から出て再び同じ交差点に入る道路と解釈する。各道路では車両集団の空間構造を無視し、それぞれ道路 i にのみ依存する車両密度 ρ_i と流量 $q_i \equiv q(\rho_i)$ で交通を特徴づけられるとする。さらに、基本図 $q(\rho)$ は道路 i によらず同一であると

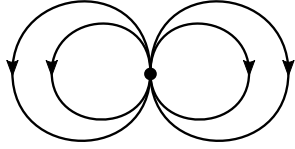


図 1: 今回考える道路ネットワーク ($N = 4$). 各辺は道路を表し, 唯一の頂点はすべての道路をつなぐ交差点となっている.

して,

$$q(\rho) = \begin{cases} v\rho & \text{if } \rho < \rho_p \equiv 1/v, \\ w(1-\rho) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

で与えられると仮定する. ここで, $w = (1-\rho_p)^{-1} = (1-1/v)^{-1}$ であり, 自由走行相での車両の速度 v がこのモデルにおける唯一のパラメタとなっている. なお, 密度と流量の最大値 ρ_{\max} , q_{\max} を用い, 長さと同時間の次元は $1/\rho_{\max}$, $1/q_{\max}$ で無次元化した. 以降の物理量もすべて無次元化したものとして取り扱う.

各交差点に入ってきた車両はすべての道路に均等に分配されると仮定すると, 各々の道路における車両密度の時間発展は, 自然な形として次の様に与えるのが妥当である;

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \frac{1}{N-n} \sum_{j=1}^N q(\rho_j) - q(\rho_i). \quad (2)$$

なお, 道路のうち密度が 1 に達したものがある時は, それらに入れられなかった分の車両を他の空いている道に入れることにする. それを反映して, 密度が 1 であるような道路の数を n とし, 式 (2) の第一項の係数を $(N-n)^{-1}$ とした

2.2 結果

以前著者らが研究した, このモデルにおける線形安定性解析の結果 [2, 3] をもとに, 巨視的基本図がどうなるかを考察する.

今, 道路のうち n 本が密度 1 になっており, 残り $M = N - n$ 本の道路について流量が $q_i = q$ で線形安定になっているという状況を考える. もし $M > v$ であるならば, M 本の道路はすべて自由走行相にあるので, 密度は $\rho_i = \rho < 1$ となり, 流量 q は $q = v\rho$ を満たす. また, 平均密度は $\bar{\rho} = (M\rho + n)/N$ となる. このときの巨視的基本図 \bar{q}_N は

$$\bar{q}_N = \frac{Mv\rho}{N} = \frac{Mv}{N} \frac{N\bar{\rho} - n}{M} = v \left(\bar{\rho} - \frac{n}{N} \right) \quad (3)$$

となる.

一方, $M < v$ の場合の線形安定になる条件は, M 本もしくは $M-1$ 本の道路が自由走行相にあるときである. まず, M 本の道路が自由走行相にある場合, すなわち $\rho < \rho_p \Leftrightarrow n/N \leq \bar{\rho} < (Mv^{-1} + n)/N$ のときは上記と全く同じ議論になるので, 巨視的基本図は式 (3) で表される. そこで, 以降は, $M-1$ 本の道路が自由走行相で残り 1 本は渋滞相にある場合を考える. 自由走行相にある道路の密度を $\rho_i = \rho$ とすると, 流量は $q = v\rho$ である. したがって, 渋滞相にある道路の密度は $1 - (v/w)\rho = 1 - (v-1)\rho$ となり, 平均密度は $\bar{\rho} = \{(M-1)\rho + [1 - (v-1)\rho] + n\}/N = [-v - M]\rho + n + 1/N$ となる. このときの巨視的基本図は

$$\begin{aligned} \bar{q}_N &= \frac{Mv\rho}{N} = \frac{Mv}{N} \frac{N\bar{\rho} - n - 1}{-v - M} \\ &= -\frac{Mv}{v - M} \left(\bar{\rho} - \frac{n+1}{N} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

となる.

以上をまとめると, この非線形回路モデルの巨視的基本図 $\bar{q}_N(\rho)$ は次の様になる.

$$\bar{q}_N(\rho) = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{q}_{N,n}(\rho), \quad (5)$$

$$\bar{q}_{N,n}(\rho) = \begin{cases} v \left(\rho - \frac{n}{N} \right) & \text{if } \max \left\{ \rho_{n-1}, \frac{n}{N} \right\} \leq \rho < \rho_n, \\ -\frac{(N-n)v}{v+n-N} \left(\rho - \frac{n+1}{N} \right) & \text{if } \rho_n \leq \rho < \frac{n+1}{N}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (6)$$

ただし,

$$\rho_n = \frac{1}{v} + \frac{n}{N} \left(1 - \frac{1}{v} \right), \quad \rho_{-1} = 0 \quad (7)$$

である.

図 2 に $v = 10/3$ のときの結果を示す. このように, このモデルでは巨視的基本図は道路の数と同じだけの山から成り, N を増やすと不連続に変化する点が存在する. この不連続な変化は, 車両が流入できる道路の数が 1 つ減少することに対応している. また, N を大きくすると巨視的基本図は各道路の基本図に近づいていく. 実際, 次のことが証明できる.

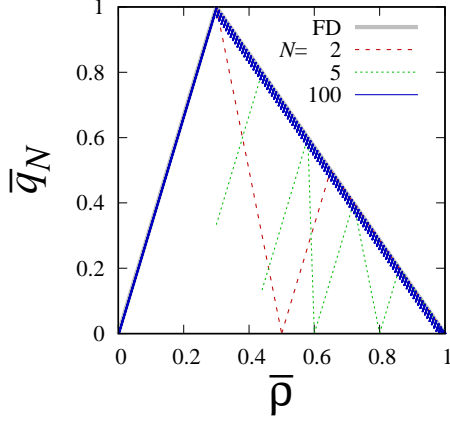


図 2: 非線形回路モデルにおける巨視的基本図. 式 (5), (6) で与えられる. 太線は各道路に与えられている基本図で, 式 (1) である. ただし, $v = 10/3$ ($\rho_p = 0.3$) としている.

定理 1. N 本の道路と 1 つの交差点から成る道路ネットワークを考える. 非線形回路モデルにおける巨視的基本図を $\bar{q}_N(\rho)$ とすると, $\{q(\rho)\}_N$ は基本図 $q(\rho)$ に一様収束する.

証明. まず, $0 \leq \rho < \rho_0 = 1/v$ において, $q(\rho) - \bar{q}_{N,0}(\rho) = 0$ である. 次に, $n \geq 1$, $\rho \in L_n = [\max\{\rho_{n-1}, n/N\}, \rho_n]$ において,

$$\begin{aligned} q(\rho) - \bar{q}_{N,n}(\rho) &= \frac{v}{v-1}(1-\rho) - v\left(\rho - \frac{n}{N}\right) \\ &= -\frac{v^2}{v-1}\rho + \frac{v}{v-1} + v\frac{n}{N} \end{aligned} \quad (8)$$

となり, ρ に関して単調減少であることから,

$$\begin{aligned} &\sup_{\rho \in L_n} \{q(\rho) - \bar{q}_{N,n}(\rho)\} \\ &= \begin{cases} \frac{v}{N} & \text{if } \rho_{n-1} > \frac{n}{N}, \\ \frac{v}{v-1}\left(1 - \frac{n}{N}\right) & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

となる. ここで, ある n に対し $N > n - 1 + v$ となるような N を選べば必ず $\rho_{n-1} > n/N$ となることから,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{\rho \in L_n} \{q(\rho) - \bar{q}_{N,n}(\rho)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{v}{N} = 0 \quad (10)$$

が成り立つ. さらに, ある n に対し $N > n + v$ となるような N を選べば必ず $\rho_n > (n+1)/N$ となるため, $R_n = [\rho_n, (n+1)/N]$ という範囲は $N \rightarrow \infty$ で

空集合となる. したがって,

$$\begin{aligned} &\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq \rho \leq 1} \{q(\rho) - \bar{q}_N(\rho)\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \max_n \sup_{\rho \in L_n \cup R_n} \{q(\rho) - \bar{q}_{N,n}(\rho)\} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

となる. \square

3 最適速度モデル

2 章で議論したモデルは状況を単純化しすぎており, 現実の都市交通のモデルとしてどの程度確かなものかは不明である. そこで, 我々は, より現実的な都市交通における巨視的基本図を考えるために, 最適速度モデルを用いたシミュレーションを行った.

3.1 モデル

今, 長さ L の道路が N 本存在し, 2 章と同様, 図 1 のような道路ネットワークをなしている状況を考える. 各道路において, 車両は一方方向に進み, 複数のレーンは存在しないものとして, 1 次元系であるとする. 道路 i に車両が n_i 台あるとし, 後方から順に $k = 1, 2, \dots, n_i$ とラベル付けをしよう. このとき, 車両 k の位置を x_{ik} とすると, 各車両は運動方程式

$$\ddot{x}_{ik} = a[U(x_{i,k+1} - x_{ik}) - \dot{x}_{ik}] \quad (12)$$

に従うものとする. ここで a は最適速度への緩和率で, すべての車両について同じ値をとるものとする. また, $U(b)$ は車両間距離 b についての最適速度関数であり, 先行研究にならない

$$U(b) = \tanh(b-2) + \tanh 2 \quad (13)$$

で与える. 先頭車両 $k = n_i$ については, 予め交差点にたどり着いたときに移る道路をランダムに決めておき, その道路の最後尾の車両との距離を考える. すなわち, 移る道路を j とすると, $x_{i,n_i+1} \equiv x_{j1}$ となる. なお, もしも先頭車両が移る道路 j に車両が一台もない場合は, $x_{i,n_i+1} = \infty$ と解釈する.

このようなモデルについてシミュレーションを行った. 運動方程式 (12) の数値積分としては, 時間刻み幅を $\Delta t = 10^{-3}$ として, 4 次の Runge-Kutta 法を用いた. 道路の長さ L はすべての道路で同じ値 $L = 100$ とした. また, 初期条件として, 各道路には車両を同じ台数 N_v だけ等間隔 L/N_v に並べ, 初速を $U(L/N_v) + \Delta v$ で与えた. ここで Δv は $-0.15 \leq \Delta v < 0.15$ を満たす一様乱数として与えている.

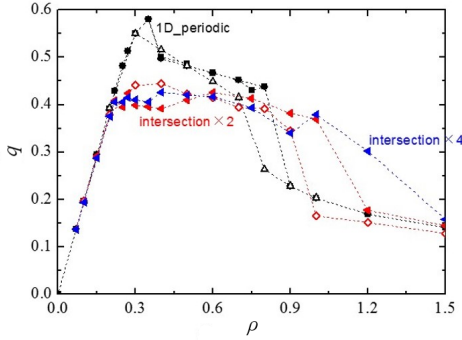


図 3: 最適速度モデルにおける巨視的基本図。道路の本数として $N = 1, 2, 4$ のそれぞれについてプロットしている。また, solid points (● など) と empty points (○ など) はそれぞれ最適速度への緩和率が $a = 1, 1.2$ であることを意味する。その他の変数の設定については本文を参照せよ。

3.2 結果

シミュレーションの結果として得られた巨視的基本図を図 3 に示す。横軸は平均密度 $\rho = N_v/L$, 縦軸は定常状態での平均流量 $q = N^{-1} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{n_i} \dot{x}_{ik}/L$ である。この図には, 周期境界条件での基本図に対応する $N = 1$ の他, $N = 2, 4$ のそれぞれについて, $a = 1, 1.2$ の場合について結果を載せている。なお, この結果はサンプル数が 1 であることに注意せよ。

このシミュレーションの結果は, 前述の非線形回路モデルと大きく異なる。まず, 自由走行相から渋滞相への転移が連続的であるという点が挙げられる。よく知られている様に, 周期境界条件での最適速度モデルの基本図は逆入型と呼ばれ, 不連続な転移となることが知られている。しかしながら, 図 3 では, $N = 2, 4$ において不連続転移は見られない。

また, 自由走行相と渋滞相の転移点が基本図と巨視的基本図でずれる, という点が挙げられる。非線形回路モデルでは図 2 に示されている様に, $\rho = \rho_p$ で相転移するというのは N を増やしても変わらなかった。しかしながら, 最適速度モデルのシミュレーション結果は, $N = 2, 4$ において転移点が周期境界条件での転移点より小さくなることを示している。なお, 最適速度モデルでは高密度側にも相転移が起こるが, この転移点も $N = 2, 4$ になると周期境界条件での転移点よりも大きくなっている。

さらに, 渋滞相での平均流量が, 周期境界条件での渋滞相での流量と比べて小さい値をとること, そしてその値は密度を変えてもほとんど変化しないと言

う点も特徴的である。このような振る舞いは, 特に $N = 2$ の場合についてはセルオートマトンモデルの研究でよく知られている [5, 6]。この値は, 今回行ったシミュレーションの範囲では N や a を変えても変わらない。ただし, 非線形回路モデルで観られていた, 渋滞相において巨視的基本図が複数の山を作るというのが最適速度モデルの場合で観られなかったのは不思議ではない。なぜならば, 今回の最適速度モデルでは, 非線形回路モデルにあった高密度の道路に車両が流入できなくなる効果を導入していないからである。

4 まとめと展望

本研究では都市交通において観られる巨視的基本図を理解するため, 巨視的基本図の振る舞いを単純な道路ネットワークについて議論した。非線形回路モデルでは不連続な巨視的基本図が得られた一方, 最適速度モデルでは連続的な巨視的基本図が得られた。不連続性の由来は交差点において車両が流入できる道路の数が減少することにあつたが, 最適速度モデルでは交差点付近での道路の密度がどれだけ高くても車両が流入できるようになっていたことが理由として考えられる。この交差点でのルールを変更するとどうなるのかは今後の課題である。

謝辞

本研究は, JST, CREST の支援を受けたものである。

参考文献

- [1] N. Geroliminis and C. F. Daganzo, *Transp. Res. B* **42**, 759 (2008).
- [2] 島田尚, 吉岡直樹, 伊藤伸泰, 第 21 回交通流と自己駆動粒子系シンポジウム論文集, 43 (2015).
- [3] 吉岡直樹, 島田尚, 伊藤伸泰, 第 21 回交通流と自己駆動粒子系シンポジウム論文集, 71 (2015).
- [4] N. Yoshioka, T. Shimada, and N. Ito, *Artificial Life and Robotics* **22**, 217 (2017).
- [5] Y. Ishibashi and M. Fukui, *J. Phys. Soc. Jpn.* **65**, 2793 (1996).
- [6] S. Yukawa, M. Kikuchi, and S. Tadaki, *J. Phys. Soc. Jpn.* **63**, 3609 (1994).