多成分系における KPZ 揺らぎ

笹本智弘 [1]

[1] 東京工業大学　理学院

概要

KPZ 普遍クラスは, 元々成長する界面の高さの揺らぎの普遍性を記述するものとして導入されたものであるが, 交通流の簡単なモデルでもある TASEP 等にも見られるなど 1 成分非平衡系の揺らぎの記述に広く適用されるものである. 近年 FPU 鎖のような 1 次元ハミルトニアン系を含め保存量が複数ある系においても, KPZ 普遍クラスを特徴付ける分布関数や相関関数が現れることがわかってきた.

本稿では, 標準的な 1 成分 KPZ 普遍クラスにおける分布関数や相関関数に関する基礎的な事柄と最近の進展について解説した後, 多成分系と KPZ 普遍クラスの関係について議論する.

KPZ fluctuations in multi-component systems

Tomohiro Sasamoto[1]

[1] Department of Physics, Tokyo Institute of Technology

Abstract

The KPZ universality class was originally introduced for describing universal properties of a growing interface, but it is in fact observed in many physical systems which are not apparently related to growing interfaces, such as the TASEP which is a simplified model of traffic flow. Recently, it has been discussed that certain universal distributions and correlation functions which characterize the KPZ universality class appear also in systems with several conserved quantities, including Hamiltonian dynamical systems like the FPU chain.

In this article, after recalling some basic facts about the single component KPZ universality class, their universal distributions and correlation functions, and some recent progress on them, we discuss how they would appear in multi-component systems.

1　はじめに: TASEP と KPZ 普遍性

交通流の単純なモデルとして, 1 次元完全非対称単純排他過程 (totally asymmetric simple exclusion process, TASEP) と呼ばれるものがある (図 1 左). これは 1 次元格子上を多数の粒子が体積排除の制限の下, 右にのみ (rate 1 で) ホップしてゆくという確率過程である. 交通流のモデルとしては不十分な点の多いモデルであるが, 種々の興味深い現象を示す事, さらに厳密に解けるモデルとなっておりその性質を詳細に調べる事が出来ることから盛んに研究されている [1].

無限系の場合, 各サイトが独立で密度 ρ が一定の状態が定常状態となることが知られている. 交通流においては平均カレント J を密度 ρ の関数として表した $J = J(\rho)$ が基本的な役割を果たすが, TASEP で密度 ρ の定常状態の場合は $J(\rho) = \rho(1-\rho)$ と簡単に求めることができる. 系の性質を調べるのに, 他の量として相関関数も考えられるが, TASEP の場合は密度 ρ が一定の定常状態の下ではほぼ自明なものとなる.

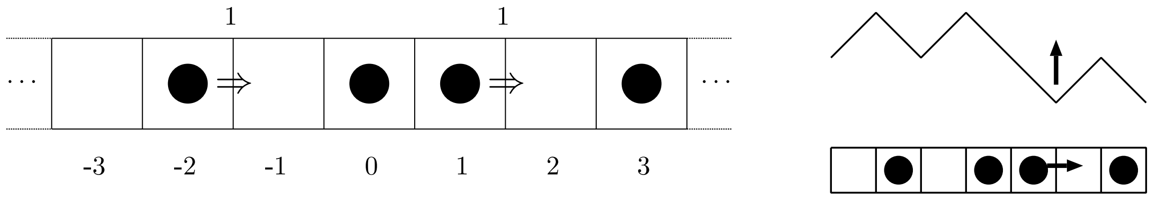

図 1: TASEP と界面成長

一方で時間に依存する性質は, たとえ定常状態においても非自明なものとなる. そのようなものの例として, ある点（例えば原点）において時刻 0 から t まで積算したカレント $N(t)$ の揺らぎを考えることができる. 密度 ρ の定常状態の場合, 時刻 t が大きい時, $N(t)$ は平均的には $J(\rho)t$ に近いと期待されるが, そのまわりでの揺らぎを問題とするのである. ナイーブには, その揺らぎのスケールは $O(\sqrt{t})$ で, そのスケールにおける揺らぎの分布はガウシアンで次のように振る舞うと考えられるかもしれない:

$$N(t) \sim J(\rho)t + c_G t^{1/2} \chi_G. \tag{1}$$

ここで c_G は定数で χ_G は標準の正規分布に従う確率変数である.

しかし TASEP の場合, シミュレーションを行うと実際の揺らぎのスケールは $O(t^{1/3})$ であることが見られる. よって (1) の代わりに

$$N(t) \sim J(\rho)t + ct^{1/3} \chi_{\mathrm{TASEP}} \tag{2}$$

のように考えるべきである. ここで現れた 1/3 の指数は, 界面成長の文脈で導入された KPZ 普遍性クラスに特徴的なものであり, このことは TASEP が粒子の有無を右下がり (右上がり）の slope で置き換える簡単なマッピングで界面成長のモデルと見なすことも出来る (図 1 右) ことから理解できる. χ_{TASEP} は $t^{1/3}$ のスケールでみた TASEP の揺らぎを表す確率変数である.

Kardar-Parisi-Zhang(KPZ) 方程式は, 界面成長における標準模型であり, その 1 次元版は次のように表される:

$$\partial_t h = \frac{1}{2}\partial_x^2 h + \frac{1}{2}(\partial_x h)^2 + \eta. \tag{3}$$

ただし $h = h(x,t)$ は時刻 t, 位置 x における界面の高さを表しており, $\eta = \eta(x,t)$ は時空ホワイトノイズである. TASEP の場合のカレントは, 界面成長の文脈では界面高さに相当する. KPZ 方程式で記述される成長する界面において, t が大きい際のある点（例えば原点）での高さの振る舞いは

$$h(x=0,t) = vt + ct^{1/3} \chi_{\mathrm{KPZ}} \tag{4}$$

のようになると期待される. KPZ ユニバーサリティというのは, 揺らぎの指数 1/3 が共通であるだけでなく, (2) における χ_{TASEP} と (4) における χ_{KPZ} の分布が $t \to \infty$ の極限で等しくなることを意味する.

2　KPZ 系における普遍分布と相関関数

2.1　界面高さの普遍分布

TASEP や KPZ 方程式は厳密に解けるモデルであり, $\chi(=\chi_{\mathrm{TASEP}} = \chi_{\mathrm{KPZ}})$ は同定されている. 最初に解かれたのは, TASEP でいうと step 初期条件と呼ばれる場合 (格子の原点より左側は全て埋まっているが, 右側は空いている初期条件) であり, 界面成長の文脈では wedge 型の初期条件に対応する. この場合, χ は GUE(Gaussian Unitary Ensemble) 型の Tracy-Widom(TW) 分布と呼ばれるもので与えられることが分かった [2]. KPZ 方程式の場合は [3, 4] で同じ分布が現れることが示された.

興味深いことに, 界面の高さ分布を記述する χ は, 初期条件に依存する. 例えば定常状態においては, χ は Baik-Rains 分布と呼ばれる別の分布となる. さらに, 平坦な初期条件 (KPZ 方程式の場合でいうと $h(x,0)=0$) から始めた場合, その揺らぎ χ は GOE(Gaussian Orthogonal Ensemble) 型の Tracy-Widom 分布で表されることも示されている.

2.2 定常時空２点相関関数

高さ揺らぎに関する手法を一般化することで, 定常状態における普遍的な時空 2 点相関関数も計算できる. これは TASEP の言葉では粒子の密度相関関数に他ならず, 散乱実験等で直接観測されることが期待できる重要な量であるが, KPZ 系においては厳密計算が可能なのである (図 2 参照).

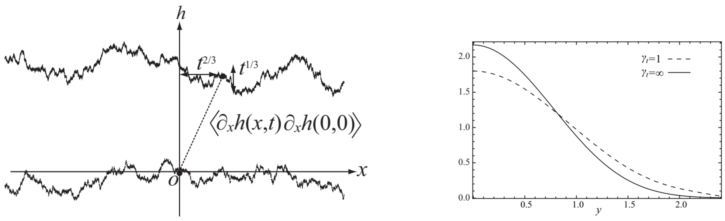

図 2: KPZ 定常 2 点相関

2.3 最近の進展

1 次元 KPZ 方程式や KPZ 普遍性クラスに関しては, 近年精力的な研究が重ねられ, 多くの進展が見られている. 例えば KPZ 方程式の可解性の背後にある頂点模型を始めとする量子可積分系や多変数直交関数との関連が明らかとなりつつある. その中で, 交通流のモデルとしても, 比較的自然と思える TASEP の一般化がいくつか現れている点を注意しておく [5].

KPZ クラスの普遍的な分布関数が現れることをどのようなモデルに対して示すことが出来るかという問題にも多くの進展があった. 特に界面の文脈でいう wedge 初期条件の場合には, かなり多くのモデルでこれまでに GUE TW 分布が現れる事が示されている. 定常状態において Baik-Rains 分布が現れる事を示すのは, モーメントの発散などの技術的な困難があったが, 昨年から今年にかけていくつかの場合には解決が見られた.

一方で未解決問題もまだ数多く残されている. 特に多時刻相関に関しては適切に評価するための代数的な構造が見出されておらず, 現在のところ, いくつかの部分的な結果が得られているだけである. また, これまでの所 KPZ 普遍性が理論的に確立されたのは可解モデルだけであるため, ”解けない” モデルに対しても KPZ 普遍性を示すことは重要な未解決問題である.

3 多成分系における KPZ 普遍性

話をガラリと変えて, 非線形なバネでつながれた 1 次元鎖のダイナミクスを考えよう. 系のハミルトニアンは

$$H = \sum_j \left(\frac{p_j^2}{2} + V(x_{j+1} - x_j) \right) \tag{5}$$

の形に書かれる. ポテンシャル $V(x)$ として

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{\alpha}{3}x^3 + \frac{\beta}{4}x^4 \tag{6}$$

の形のものを考えよう. $\alpha = \beta = 0$ の場合は調和バネでつながれた連成振動の問題となり, Fourier 変換すれば独立な調和振動子の線形結合で表される事がよく知られているが, 問題はバネを非線形性のあるもので置き換えた場合に系がどのような性質を示すかということである. ポテンシャル (6) は Fermi, Pasta, Ulam が計算機を用いて熱化を議論しようとした際導入したものであるが [6], 解けない非線形問題のため, その多くの性質は未だにわからないままである.

FPU 鎖のような系は, 粒子数 (より正確には隣接粒子の変位の差である stretch と呼ばれる量), 運動量, エネルギーという 3 つの保存量があり, そのマクロな性質を議論するには流体力学的な記述が有効であり,

その際１つの熱モードと２つのサウンドモードに着目することが有用である．2012 年, van Beijeren は, FPU 鎖を含むようなかなり一般の１次元の流体力学的な扱いにノイズを加えることにより, 系の揺らぎや相関の性質を議論し, 熱平衡状態にある系のサウンドモードの時空２点相関関数が KPZ 系の定常２点相関関数 (図２右) で記述できるだろうという予想を立てた [7]．さらに Spohn は, Beijeren の議論がハミルトニアンで記述されるような系に留まらず, 複数の保存量を持つ様な多成分系一般に適用できるものであることに着目し, 予想をより一般性のある形に定式化した [8]．特に TASEP を一般化した多成分確率過程モデルにも適用できる形となった．その後彼らの予想は種々の数値シミュレーションで確認されていった．

前節の KPZ 普遍性クラスの議論においては, 定常２点相関関数は GUE TW 分布を得る議論・計算を一般化して得られたと述べた．本節の議論においては, まずは 平衡状態にある Hamilton 系の揺らぎの性質に興味があったため, KPZ ２点相関関数との関連が最初に現れたのだが, 今度は逆に Hamilton 系やより一般の多成分系において TW 分布が見られるのかという疑問が湧く．実際多成分系においても初期条件を適当に選ぶことにより GUE TW 分布が見られるであろうことは [9] において議論された．では GOE TW の場合はどうなるかという疑問も起こるが, これについては講演の中で議論したい．

Beijeren-Spohn の予想は, 数値シミュレーションにおいて確証されつつあり, 元々界面成長という限られた文脈で考えられた KPZ 普遍性が, 実はより広い系に対して有効性を持つさらに普遍性の高いものであるということを示しているが, その理論的な理解は遅れたままとなっている．そこで一つの大きな目標は, FPU 鎖のような非線形鎖において, TW 分布や KPZ ２点関数が現れる事を数学的に証明するということになるであろう．しかしそれは極めて難しい問題であると考えられる．FPU 鎖のような非線形鎖は, カオス性が高く, その長時間の性質を議論することは一般に極めて困難であるからである．一方で予想自体は非線形鎖に限らない多成分系に対して立てられているのであるから, まずは多成分（特に２成分）の確率過程モデルにおいて示すということが考えられる．講演の中ではそのような点についても議論したい．

謝辞: 本稿の内容はこれまでの多くの方々との議論に基づくものです．現在進行中の部分に関しては特に今村卓史氏 (千葉大), Jan de Gier 氏 (メルボルン大), 日置伊織氏 (東工大) に感謝致します．

参考文献

[1] 西成活裕, ”渋滞学”, 新潮選書, (2006).

[2] K. Johansson, Shape fluctuations and random matrices, *Comm. Math. Phys.* **209** (2000) 437–476.

[3] T. Sasamoto, H. Spohn, Universality of the one-dimensional KPZ equation, *Phys. Rev. Lett.* **834** (2010) 523–542.

[4] G. Amir, I. Corwin, J. Quastel. Probability distribution of the free energy of the continuum directed random polymer in $1 + 1$ dimensions. *Comm. Pure Appl. Math.* **64** (2011) 466–537.

[5] I. Corwin, L. Petrov, The q -PushASEP: A New Integrable Model for Traffic in 1 + 1 Dimension, *J. Stat. Phys.* **160** (2015) 1005–1026.

[6] E. Fermi, J. Pasta, S. Ulam. Studies of nonlinear problems, Los Alamos report LA-1940 (1955).

[7] H. van. Beijeren, Exact results for anomalous transport in one-dimensional Hamiltonian systems , *Phys. Rev. Lett.* **108** (2012) 180601.

[8] H. Spohn, Nonlinear fluctuating hydrodynamics for anharmonic chains, *J. Stat. Phys.* **154** (2-14) 1191–1227.

[9] H. Spohn C. B. Mendl, Searching for the Tracy-Widom distribution in nonequilibrium processes, *Phys. Rev. E.*, **93** (2016) 060101(R).