

単一レーン上の追従ビークルのバングバング制御

室暁生¹, 西成活裕²

¹ 東京大学 大学院工学系研究科 航空宇宙工学専攻

² 東京大学 先端科学技術研究センター

概要

本論文では単一レーン上での輸送制御モデルを提案し、時間遅れを含むパラメーターに対する流量の依存性を議論する。同モデルは最適速度模型 (OVM) を元にしており、OVM は車から成る一様流が渋滞に遷移する現象を説明できる。OVM はさほど複雑でなく、流量の観点からよく研究がされているため輸送へ応用できる可能性がある。しかしながら、実際のシステムでは制御の単純化のため、加速度は定数で、最適速度関数も連続的に変化しないことが多い。そこで、OVM を修正した上で、系の流量を近似的に計算する。

Bang-bang Control of Following Vehicles on a Lane

Akio Muro¹, Katsuhiro Nishinari²

¹ Department of Aeronautics and Astronautics, Graduate School of Engineering, The University of Tokyo

² Research Center for Advanced Science and Technology, The University of Tokyo

Abstract

A transport control model for a single lane is proposed in this paper in order to discuss how the flow rate is dependent on parameters including time delays. The model is derived from the Optimal Velocity Model (OVM), which can explain the transition from a uniform flow of vehicles to a traffic jam. The OVM can be useful in the application of a transport system, because the OVM is simple and has been well investigated in terms of flow rate. However, in practical systems accelerations are often constant and optimal velocity functions are not continuously changing in order to simplify the control. Thus, we modify OVM, and calculate the flow rate approximately.

1 はじめに

世の中には様々な「渋滞」が存在する。車の渋滞、群集の渋滞、飛行機の渋滞など数えればきりが無い。渋滞現象を捉えるべく、様々なモデルが提案されてきたがその一つが最適速度模型 (OVM) である [1]。OVM は車の追従運動を表すモデルで、式 (1) で表される。

$$\frac{dv_i(t)}{dt} = a \{V(h_i(t)) - v_i(t)\} \quad (1)$$

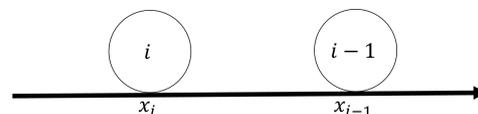


図 1: 最適速度模型における変数

ここに、 x_i, v_i はそれぞれ i 番目の車の位置、速度を表す。 $h_i(t)$ は時刻 t における i 番目の車とその前方の $i-1$ 番目の車の間の距離である。また、 $V(x)$ は最適速度関数と呼ばれるもので、例えば、その関

数形として式 (2) のようなものが採用される。

$$V(x) = \tanh(x - c) + \tanh c \quad (2)$$

さらに、 a は感応度と呼ばれるもので、加減速の機敏さを表す。

OVM は車の追従挙動を現象として記述するものであって、制御モデルではない。しかし、最適速度模型に基づく車列の挙動はよく研究されており、流量が減少する状況も調べられている [2]。ゆえに、OVM を輸送システムの制御モデルに応用することで、流量、輸送能力の高い輸送システムを実現することができると考えられる。ただし、最適速度模型をそのまま制御ルールに用いると、「加速度を連続的に変化させる必要がある」という問題が生じる。実際のシステムにおいて、加速度を細かく指定することは制御機構上難しい。そこで、本研究では次の式 (3),(4) を制御ルールとして採用した。

$$\frac{dv_i(t + \tau)}{dt} = \begin{cases} a_p & V(h_i(t)) \geq v_i(t) \\ -a_m & V(h_i(t)) < v_i(t) \end{cases} \quad (3)$$

$$V(x) = \min \{ \max \{ [x], 0 \}, 3 \} \quad (4)$$

$x_i(t), v_i(t), h_i(t)$ はそれぞれレーン上の i 番目のビークルの位置、速度、前方との距離を表す変数である。次に、 a_p, a_m はそれぞれ加速時、減速時の加速度の大きさを表す定数である。制御の単純化を期待して、最適速度関数は式 (4) のように階段状の関数を採用している。最後に、 τ は加減速における時間遅れである。これは加速度を調整する機構上生じるもので、本研究では定数とする。

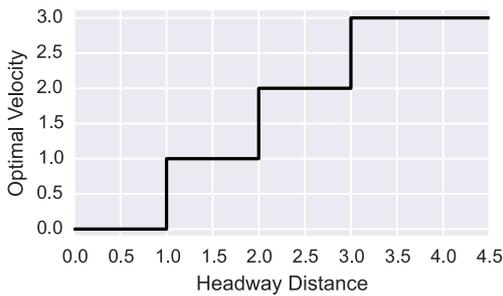


図 2: 本研究における最適速度関数

この制御ルールに基づいたビークルの位置の時間発展を式 (3) を差分化して数値積分した (速度は前進差分、位置は中央差分)。その結果から流量を算出し、流量の特徴を解析・議論する。

2 時間遅れを含まない場合

2.1 諸条件

次の計算条件に対してビークルの位置の時間発展を数値計算し、流量を調べた。

[レーン] 長さ $L = 100$ の周回コース (周期境界条件)

[初期条件] n 台のビークルが $x = 0$ で静止している。

($x_i(t) = 0, v_i(0) = 0$)

[加速度] $a_p = a_m = 1.5$, 2 の 2 通り

[時間遅れ] $\tau = 0$

[平均密度] $\bar{\rho} = n/L = 0.02, 0.03, \dots$ (0.01 刻み)

[計算時間] $t = 0$ から $t = 3000$ まで計算

[時間刻み] $\Delta t = 0.001$

[流量計測] $1000 \leq t \leq 3000$ に $x = kL (k \in \mathbb{Z})$ を通過したビークル数を 2000 で割る。(周期境界であるため、 $x = kL (k \in \mathbb{Z})$ はコース上の同一点に対応。)

2.2 計算結果

図 3 は平均密度と流量の関係を示す基本図である。流量 Q が平均密度 $\bar{\rho}$ の増加に伴って増加する領域と減少する領域が存在し、さらに、後者の領域において、 $\partial Q / \partial \bar{\rho}$ は加速度の大きさ a_p, a_m に依存する。

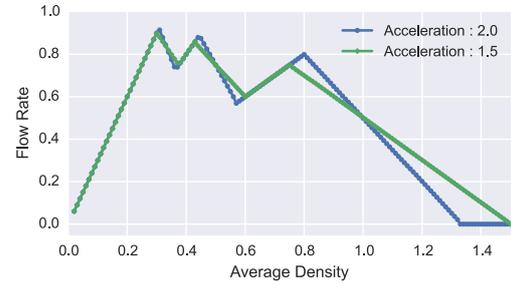


図 3: 平均密度と流量の関係図 (基本図)。 $a_p = a_m = 2$ の場合と $a_p = a_m = 1.5$ の場合をプロットしている。

2.3 流量の推定理論

$\bar{\rho}$ の増加に伴って Q が増加する領域では、

$$Q = \bar{\rho} V(1/\bar{\rho}) \quad (5)$$

と推定することができる。 $\bar{\rho}$ の増加に伴って Q が減少する領域における流量を推定するにあたり、いく

つか関数を導入する。

$$H(x) = \begin{cases} 3 & 2.5 \leq x \\ 2 & 1.5 \leq x < 2.5 \\ 1 & 0.5 \leq x < 1.5 \\ 0 & x < 0.5 \end{cases} \quad (6)$$

$$V_h(\rho) = V(H(1/\rho)), V_l(\rho) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} V(H(1/\rho) - \varepsilon) \quad (7)$$

初期状態から十分時間がたったとき、 $\bar{\rho}$ の増加に伴って Q が減少する領域では、ピークルの速度は $V_u(\bar{\rho}) \rightarrow V_l(\bar{\rho}) \rightarrow V_u(\bar{\rho}) \rightarrow V_l(\bar{\rho}) \rightarrow \dots$ と周期的に変化している。 i 番目のピークルが速度 $V_l(\bar{\rho})$ から $V_u(\bar{\rho})$ に加速するとき、前方のピークルはすでに速度 $V_u(\bar{\rho})$ に達しており、この加速の間、前方のピークルの速度は一定であると仮定すると、 i 番目のピークルが速度 $V_u(\bar{\rho})$ に達したときの前方との距離 $h_u(\bar{\rho})$ は

$$h_u(\bar{\rho}) = H(1/\bar{\rho}) + \frac{(V_u(\bar{\rho}) - V_l(\bar{\rho}))^2}{2a_p} \quad (8)$$

となり、同様の考え方を減速時に用いると、速度 $V_l(\bar{\rho})$ に達したときの前方との距離 $h_l(\bar{\rho})$ は

$$h_l(\bar{\rho}) = H(1/\bar{\rho}) - \frac{(V_u(\bar{\rho}) - V_l(\bar{\rho}))^2}{2a_m} \quad (9)$$

となる。流量の見積もりにあたり加減速中のピークルの存在を無視し、速度 $V_u(\bar{\rho})$ のピークルが rn 台、速度 $V_l(\bar{\rho})$ のピークルが $(1-r)n$ 台であるとする。

$$\sum_{i=0}^{n-1} h_i = L \quad (10)$$

が成り立つことから、式 (11) が得られる。

$$r = \frac{1/\bar{\rho} - h_l(\bar{\rho})}{h_u(\bar{\rho}) - h_l(\bar{\rho})} \quad (11)$$

式 (8),(9),(11) からパラメーターに対する r の値を表す式 (12) を得る。

$$r = \frac{2a_p a_m \left[1 - \bar{\rho} \left\{ H(1/\bar{\rho}) - \frac{(V_u(\bar{\rho}) - V_l(\bar{\rho}))^2}{2a_m} \right\} \right]}{\bar{\rho}(a_p + a_m)(V_u(\bar{\rho}) - V_l(\bar{\rho}))^2} \quad (12)$$

$\bar{\rho}$ の増加に伴って Q が減少する領域では、 $0 < r < 1$ が成り立っていると考えられる。この領域において、流量は式 (13) で推定される。

$$Q = r\bar{\rho}V_u(\bar{\rho}) + (1-r)\bar{\rho}V_l(\bar{\rho}) \quad (13)$$

特に、 $a_p = a_m = a$ とおける場合、式 (12),(13) から次の式が得られる。

$$Q = \frac{1 - \bar{\rho}H(1/\bar{\rho})}{V_u(\bar{\rho}) - V_l(\bar{\rho})} a + \frac{\bar{\rho}(V_u(\bar{\rho}) + V_l(\bar{\rho}))}{2} \quad (14)$$

流量を推定する流れをまとめる。まず式 (12) の r を計算する。 $0 < r < 1$ のときは式 (13)、 $r \leq 0, 1 \leq r$ のときは式 (5) が推定式となる。推定値と数値計算結果を比較したのが図 4 である。平均密度の増加に伴って流量が減少する現象を式 (13) が定量的に説明できていることが分かる。

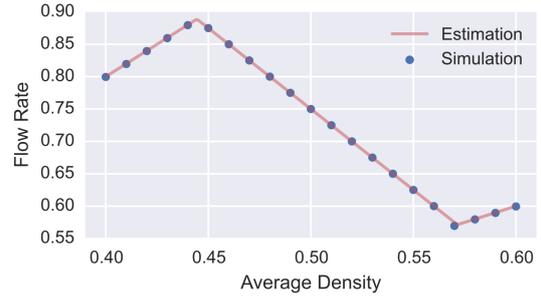


図 4: $a_p = a_m = 2$ の場合に流量の推定値 (実線) と数値計算結果 (丸) を比較した。

3 時間遅れを含む場合

時間遅れによってピークルの挙動は複雑になるため、流量の推定は難しくなる。関連する既存研究として、時間遅れを含む OVM に従う一様流の安定性が調べたものがある [3]。時間遅れが小さいとき、その安定性に関する影響は小さいことが示された。しかし、本研究における渋滞領域、すなわち、平均密度 $\bar{\rho}$ の増加に伴って流量 Q が減少する領域では、 τ が Q に影響を及ぼすことをこれから見ていく。

3.1 諸条件

時間遅れを含まない場合の計算条件から変更した部分を記す。

[加速度] $a_p = a_m = 2$ のみ

[時間遅れ] $\tau = 0, 0.002, 0.004, \dots$ (0.002 刻み)

[時間刻み] $\Delta t = 10^{-5}$

[平均密度] $\bar{\rho} = 0.46, 0.5, 0.54$ のとき

時間遅れがない場合において、これらの条件では十分に時間がたつと、加減速中のピークルを除くピークルの速度は $V_u(\bar{\rho})$ 、 $V_l(\bar{\rho})$ の 2 値になる。 $\bar{\rho}$ の増加に伴って Q が減少する「渋滞領域」である。

3.2 計算結果

図5は流量が時間遅れの影響でどのように変化するかを示すものである。時間遅れの増加 $\Delta\tau$ が流量 Q の増加に寄与するか、減少に寄与するかは平均密度 $\bar{\rho}$ と時間遅れの τ の大きさに依存する。

例えば、図5において時間遅れが小さいとき、平均密度が0.46のときは時間遅れによって流量が減少しているのに対し、平均密度が0.54のときには時間遅れによって流量が増加している。

さらに時間遅れが大きくなると、異なる平均密度に対して得られる流量の値の差が小さくなる傾向があることも確認できる。

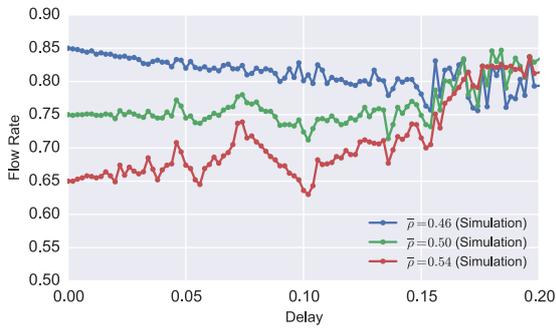


図5: 時間遅れ (横軸) と流量 (縦軸) を平均密度 $\bar{\rho} = 0.46, 0.50, 0.54$ の3つの場合においてプロットした。

3.3 流量の推定理論 (τ が小さい場合)

$a_p = a_m = a$ とおいた場合を考える。ここで、流量の推定にあたり、「 τ が十分に小さければ、時間遅れによる流量の変化は加速度 a を別の値に置き換えることで説明できる」という仮説を用いる。置き換えた加速度を実効加速度と呼ぶことにし a_e で表す。 a_e は次の関係が成り立つように定める。

「速度 $V_l(\bar{\rho})$ で進んでいるビークル A は $t = t'$ において加速度 a_e で加速を始め、速度 $V_u(\bar{\rho})$ に達してからは等速で進む。一方、ビークル B も速度 $V_l(\bar{\rho})$ で進んでいるが、B は $t = t' + \tau$ において加速度 a で加速をはじめ、速度 $V_u(\bar{\rho})$ に達してからは等速で進む。A, B ともにこれらの加速を終えたとき、A, B の $t = t'$ のときからの変位は等しい。」

この関係が成り立つような a_e は次の式で表される。

$$a_e = a \left\{ 1 + \frac{2a\tau}{V_u(\bar{\rho}) - V_l(\bar{\rho})} \right\}^{-1} \quad (15)$$

式 (14) に式 (15) を代入することで流量が推定できる。推定結果とシミュレーション結果の比較が図6である。およそ $\tau < 0.15$ の範囲では傾向をある程度定量的に説明することができているが、単調でない流量の変化 (「振動」と呼ぶ) は説明できていない。

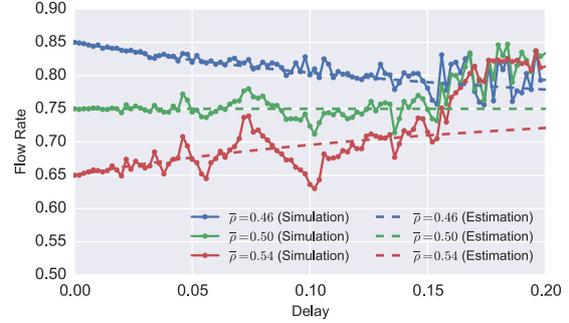


図6: 実効加速度に基づく推定理論 (破線) とシミュレーション結果 (実線) の比較

4 まとめ

本論文では最適速度模型に修正を加えて、実現がより簡単と考えられる制御ルールを提案し、周期境界条件のもとでの制御ルールの輸送能力 (流量) を検証した。時間遅れがない場合に平均密度 $\bar{\rho}$ が増加に伴う流量 Q を定量的に推定可能であることを示し、続いて、比較的小さな時間遅れが流量に与える影響を実効加速度を導入することで説明した。今後の課題は、流量 Q の時間遅れ依存性において見受けられる「振動」減少を説明すること、加えて、時間遅れが大きい場合に実効加速度の代わりとなる推定理論を生み出すことである。

参考文献

- [1] Bando, M., et al. "Structure stability of congestion in traffic dynamics." *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics* **11.2** (1994): 203-223.
- [2] Bando, Masako, et al. "Dynamical model of traffic congestion and numerical simulation." *Physical Review E* **51.2** (1995): 1035.
- [3] Masako Bando, et al. "Analysis of optimal velocity model with explicit delay." *Physical Review E* **58.5** (1998): 5429.