

# Kantorovich metric を用いた 2次元 OV 粒子の集団流の 感応度依存性の解析

石渡龍輔<sup>1</sup>, 衣川亮太, 杉山雄規<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 名古屋大学 大学院情報科学研究科 複雑系科学専攻

## 概要

2次元最適速度模型 (OV) 粒子集団は, 迷路状の空間内において紐状形態を形成し, 長時間その形態を維持し続ける. 我々は, 感応度の値と 2次元 OV 粒子集団の作る巨視的形態の安定性の関係を考えるために, Kantorovich metric を用いた解析を行い, 巨視的形態が2つの紐状形態だけであること, 紐状形態の維持時間が最長となるために最適な感応度の値があることを発見した.

## Analysis of dependencies of collective flow of the two-dimensional OV particles on the magnitude of the sensitivity using the Kantorovich metric.

Ryosuke Ishiwata<sup>1</sup>, Ryota Kinukawa, Yuki Sugiyama<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Department of Complex Systems Science, Graduate School of Information Science,  
Nagoya University

## Abstract

The two-dimensional optimal velocity (OV) particles emerge string-like patterns and maintain those patterns in the simpmaze-like corridor. Using the kantorovich metric, we found that there is no optimal pattern except for string-like patterns, and the string-like patterns frequently emerge and are maintained for a long time at the appropriate value of sensitivity for stabilization.

## 1 はじめに

魚群や鳥の群れなどの自己駆動粒子の集団運動は, 集団全体としての巨視的運動が大きく揺らぎ, 多数の準安定な流動形態に遷移する. また自己駆動粒子集団の運動では, 高熱源から低熱源への熱流の流れのような動的安定な非平衡定常運動が見られる. 非平衡定常的な集団運動の安定性や集団全体の空間構造などを少数の特徴量で表すことは, 様々な時空間スケールで現れる運動に共通した性質を見出すために役立つであろう. 実際の自己駆動粒子の集団運動は, 準安定的な多数の流動形態を持ち, 時間的にその形態を変化させる. そのため, 平衡統計力学の考

え方をそのまま使うことができないだろう. さらに, 自己駆動粒子の運動が必ずノイズを含むわけでもないため, ランジュバン系に用いられる揺動項を利用した従来の手法を用いることができない. そこで我々は, 馬場と小松崎の先行研究にならい [1], 粒子の位置の分布を用いて巨視的な集団の形態を表現し, 形態間の類似度を評価することで非平衡定常状態にある集団形態の安定性を評価することを考えた.

我々は, 形態間の類似度 (正確には非類似度) を表す Kantorovich metric を用いて, 2次元 OV 粒子の集団運動の時系列データの各タイムステップの集団形態を他の全てのタイムステップの形態と比較し, 巨視的形態全ての類似度を定量化した. さらに, 多次

元尺度法を用いて流動形態の時間変化を2次元ユークリッド空間上に分布を射影した。その結果、巨視的形態の時間発展は可視化空間上で連続的な軌道を描くことが明らかとなった。そして、集団運動の非平衡定常状態は、可視化空間上において力学系におけるアトラクタに類似した構造を持つことも明らかとなった [2]。

我々は、前述した報告済みの研究を発展させ、2次元OV粒子の集団的な非平衡定常運動の安定性と各粒子に設定されたパラメーターとの変化を調査する。具体的には、集団運動に影響するパラメーターのひとつである全個体の感応度の値を一様に変化させて長時間シミュレーションを行い、感応度の値ごとに2次元ユークリッド空間を作成し、集団運動の比較を行う。

## 2 2次元OV模型

2次元OV模型は、生物集団の運動を再現する粒子模型である。2次元OV粒子は、近隣の粒子に近づくように動き、近づきすぎると離れるように動くように自身の駆動力（引力/斥力）をコントロールする。2次元OV模型の運動方程式は、以下のように表される：

$$\ddot{\mathbf{x}}_j = a \left[ \mathbf{V}_{s,j} + \sum_k \mathbf{V}(\mathbf{r}_{kj}, \dot{\mathbf{x}}_j) - \dot{\mathbf{x}}_j \right],$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}_{kj}, \dot{\mathbf{x}}_j) = (1 + \cos \theta_{kj}) f(r_{kj}) \mathbf{n}_{kj},$$

$$f(r_{kj}) = \alpha \left[ \tanh \beta (r_{kj} - b) + c \right],$$

$\mathbf{x}_j$  は  $j$  番目の粒子の位置を表す。  $\mathbf{r}_{kj} \equiv \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j$  と  $r_{kj} \equiv |\mathbf{r}_{kj}|$  は、それぞれ  $k$  番目と  $j$  番目の粒子の位置の変位ベクトルと距離を表している。  $\mathbf{n}_{kj} \equiv \mathbf{r}_{kj}/r_{kj}$  は、  $\mathbf{r}_{kj}$  の単位ベクトルである。  $\mathbf{V}(\mathbf{r}_{kj}, \dot{\mathbf{x}}_j)$  は、  $j$  番目の粒子が  $k$  番目の粒子から受ける相互作用を表している。  $\theta_{kj}$  は、  $j$  番目の粒子の速度ベクトル  $\dot{\mathbf{x}}_j$  と相対位置  $\mathbf{r}_{kj}$  のなす角度である。 すなわち  $\theta_{kj}$  は、  $j$  番目の粒子の進行方向を角度  $0$  としたときに、  $j$  番目の粒子から見て  $k$  番目の粒子が居る方角を表している。  $(1 + \cos \theta_{kj})$  の影響により、粒子は前方の粒子から強く影響を受け、後方の粒子からの影響は小さい。  $f(r_{kj})$  は、OV関数と呼ばれ、距離に応じて斥力/引力の強さを決定する関数である。パラメーター  $c$  は、粒子の斥力領域と引力領域の広さをコントロールするパラメーターであり、通常  $-1 \leq c \leq 1$  で変化する [3]。本論文では、  $c = 1$  とし引力領域だけが存在する状況を考える。  $\alpha$  は、相互作用の強さをスケーリ

ングする定数であり、  $\beta$  は  $\tanh$  の変曲点  $b$  での勾配の大きさをコントロールする [3, 4, 5]。本論文では、定数  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $b$  を、0.25, 4.0, 1.0 と設定している。  $\mathbf{V}_{s,j}$  は、各粒子が相互作用する相手なしでも動き続けるようにするための項であり、  $\mathbf{V}_{s,j} = 0.75 \dot{\mathbf{x}}_j / |\dot{\mathbf{x}}_j|$  の形で与えられる（初出は参考文献 [6] である）。

相互作用は近接相互作用であり、近隣にいる最大6粒子と同時に相互作用する。対象となる粒子が相互作用する近接粒子は、対象の粒子の近傍を進行方向に基づいて6分割し、その中で最近接した粒子であると設定した。また、各粒子の近傍は、半径2.0の円領域と設定する。

粒子が運動する空間は、周期境界で繋がった2つの出入り口と2つの反射壁をもつ簡単な迷路状の構造する（図1）。感応度  $a = 20.0$ 、粒子数を115と設定し、一様ランダムに設定した粒子分布からシミュレーションをはじめると、図2のような紐状形態が準安定状態となって繰り返し現れる。自己駆動力があるため各粒子は停止することはなく、得られた紐状形態は動的な安定状態と言える。

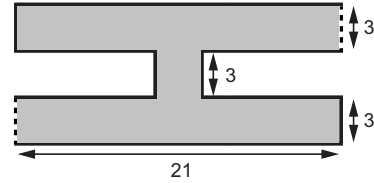


図1: 灰色の領域は、粒子が運動する空間。線は、弾性境界を表しており、点線は周期境界で繋がった出入り口を表している。

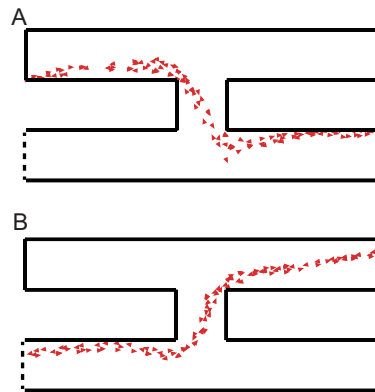


図2: (A) 反射壁の間を行き来する粒子の集団運動。(B) 2つの出入り口の間を繋ぐような集団運動。

### 3 紐状形態と感応度の関係

#### 3.1 粒子の位置分布の幾何空間への射影

感応度を  $a = 15, 25, 35$  と設定して、感応度の値ごとに一様ランダムな位置分布を初期条件とし、シミュレーションを行った。それぞれの感応度の値における紐状形態の安定性を調べるために、Kantorovich metric<sup>1</sup>を用いて全時刻間の粒子の位置分布を比較し、時刻間の分布の非類似度合いを表す Kantorovich metric を要素とする行列を作成した。得られた非類似度を要素とする行列を変形して得られる行列の固有値分解を行う多次元尺度構成法を利用し、位置分布を2次元ユークリッド空間上の点として射影した。この方法を使うと、位置分布間の Kantorovich metric が、ユークリッド空間上の点間の距離に近い値を取るようになってきている [7]。

各感応度における粒子の位置分布を2次元ユークリッド空間に射影した結果、図3が得られた。図に見られる1点が粒子の位置分布1つに対応しており、各点の色は位置分布が表れた時刻を表している。左右に見られる点の密集した領域は、左が図2(A)で表される形態に近い位置分布を表しており、右は図2(B)で表される形態に近い位置分布を表している。示した図と実際のシミュレーションの確認によって、2つの紐状形態(図2)以外に安定な巨視的形態は存在しないことが分かった。図3の結果から、 $a = 25$ を設定した場合が最も紐状形態の安定性が高いと考えられる。集団運動の非平衡状態の安定性は、「繰り返し同じ巨視的形態をとる集団運動が現れる」こと、「巨視的形態を取ると長時間形態を維持し続ける」ことだと考えられる。そこで、次に紐状形態の出現頻度と紐状形態の維持時間を調べることにする。

#### 3.2 紐状形態の維持時間

我々は、紐状形態の出現頻度と紐状形態の維持時間を調べるため、各時刻の粒子の位置分布を「紐状

<sup>1</sup>空間を適当な数のセルに分割する。 $\mu, \nu$ を粒子の分布だと考える( $\mu_i$ を*i*番目のセル上の粒子数、 $\nu_j$ を*j*番目のセル上の粒子数とする)。分布 $\mu$ を $\nu$ に変化させることを考え、“変化のさせ方”を*f*と書き、 $f_{ij}$ を $\mu$ の*i*番目のセルから $\nu$ の*j*番目のセルに移動させる粒子数とする。1粒子を*i*番目のセルから*j*番目のセルに移動させるためには、 $c_{ij}$ だけコストが必要とする(本文中では $c_{ij}$ をセル間のユークリッド距離とする)。 $\mu$ を $\nu$ に変化させる、最少のコストは、

$$C(\mu, \nu) = \min_{f_{ij}} \sum_{i,j} f_{ij} c_{ij}, \quad (1)$$

と書ける。ただし、 $\sum_j f_{ij} = \mu_i$ と $\sum_i f_{ij} = \nu_j$ を満たす。得られた最少のコスト  $C(\mu, \nu)$  を Kantorovich metric と呼ぶ。

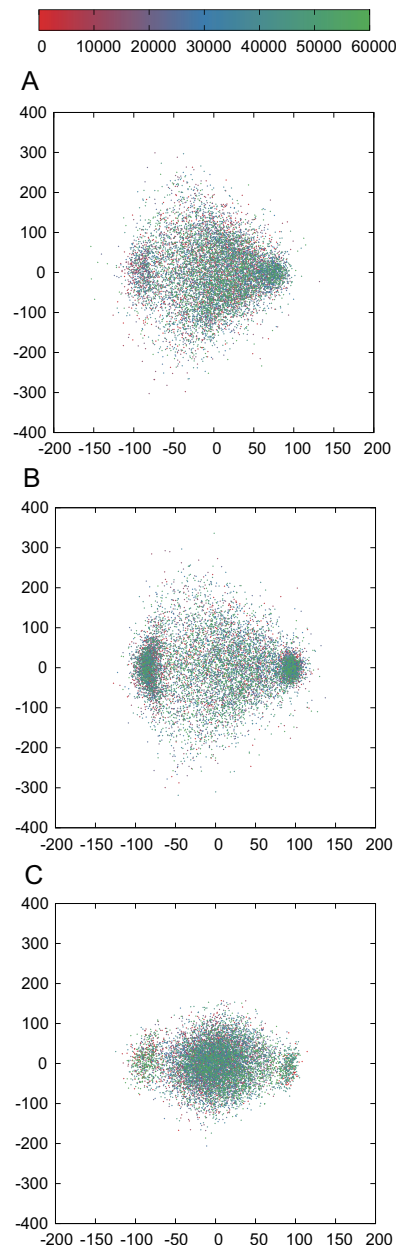


図3: 2次元ユークリッド空間で表された粒子の位置分布。(A) $a = 15$ , (B) $a = 25$ , (C) $a = 35$ . 紐状形態A(図2A)に近い粒子の位置分布が左側, 紐状形態B(図2B)に近い粒子の位置分布が右側に密集して表れている。

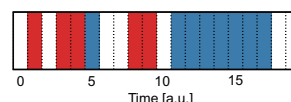


図4: 分類された各時刻の状態の表し方の例。点線は、時刻の境界を表している。

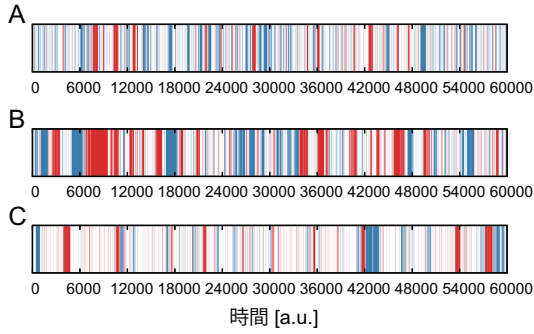


図 5: 各時刻の粒子の位置分布を「紐状形態 A (図 2A) に近い状態」「紐状形態 B (図 2B) に近い状態」「紐状形態ではない状態」に分類した結果. (A) $a = 15$ , (B) $a = 25$ , (C) $a = 35$ .

形態 A (図 2A) に近い状態」「紐状形態 B (図 2B) に近い状態」「どちらの形態でもない状態」と分類する. 図 3 を用い, リファレンスとなる紐状形態 A, B を感応度ごとに各時系列データから決定する. そして, 紐状形態 A, B に対応する粒子の位置分布と各時刻における粒子の位置分布との非類似度を用い, 全時刻の状態を分類する. 各時刻の粒子の位置分布が, 紐状 A に近い状態であれば赤色, 紐状 B に近い状態であれば青色, それ以外の状態であれば無色で表すことにする (図 4).

感応度の値ごとの各時刻の粒子の位置分布は, 図 5 のように時間変化してた. この結果から, 紐状形態が  $a = 20$  において長時間維持されていることが明らかとなった. 紐状形態 A, B に特徴的な違いは見られなかった. 得られた状態の変化の結果 (図 5) を用いて, 「紐状形態の出現頻度」と「紐状形態の維持時間」を調べることにした. 我々は, 紐状形態の維持時間を, 同じ紐状形態に近い状態を維持し続ける時間として定義する. 紐状形態に近い状態がある時点で表れ, 次の時点において別の状態に変化した場合, それを維持された状態と考えることはできないだろう. そこで, 瞬間的に表れている赤色もしくは青色の状態は, 出現頻度と維持時間を計算する際に無視することにする. 図 4 の場合, 紐状形態が表れて維持されていると考える時刻は, [3, 4], [8, 9], [11, 17] になる. 図 5 に表されている状態の分類結果を用いて, 維持時間と出現回数の関係を調べた (図 6). 感応度  $a = 15$  の場合, 維持時間が短い紐状形態が多数回出現していた.

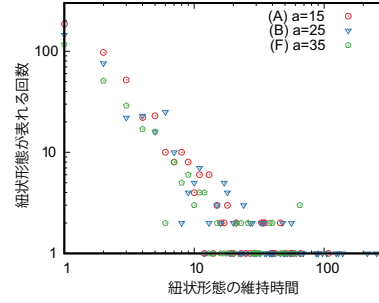


図 6: 維持時間ごとの紐状形態の出現回数. 維持時間と出現回数との関係を両対数グラフで表した.

## 4 まとめ

本論文では, 2次元 OV 粒子が迷路状空間内で形成する巨視的形態の安定性と感応度の値との関係を調べた.  $a = 15, 25, 35$  の場合の集団運動を比較したところ, 長時間維持される巨視的状态は 2 つの紐状形態だけであった (図 2). 紐状形態は  $a = 25$  において長時間維持されていた. さらに  $a = 25$  では, 長時間維持される紐状形態は多数回出現していた. また,  $a = 15$  の感応度の場合, 非常に短い時間維持される紐状形態が何度も出現していた. 得られた結果は, 特定の感応度において巨視的形態の安定性が最大となる可能性を示唆していた. 感応度が大きいほど追従性は強くなるが, 他方で形態が変化しづらくなる. したがって, 感応度が大きくなりすぎると紐状形態を殆ど取らなくなる. この性質が, 感応度の最適値の存在と関係していると考えられる. 本研究の将来の展望は, 巨視的形態の時間変化をより詳細に調べることである.

## 参考文献

- [1] Akinori Baba and Tamiki Komatsuzaki. *Proc Natl Acad Sci U S A*, 104(49):19297–19302, December 2007.
- [2] 石渡 龍輔, 衣川 亮太, and 杉山 雄規. 第二十回交通流のシミュレーションシンポジウム, pages 59–62, 2014.
- [3] Akihiro Nakayama, Katsuya Hasebe, and Yuki Sugiyama. *Physical Review E*, 77(1):016105, January 2008.
- [4] Akihiro Nakayama, Katsuya Hasebe, and Yuki Sugiyama. *Physical Review E*, 71(3):36121, March 2005.
- [5] Ryosuke Ishiwata and Yuki Sugiyama. *Physical Review E*, 92(6):062830, December 2015.
- [6] A Nakayama and Yuki Sugiyama. In *Traffic and Granular Flow '03*, pages 399–404. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2005.
- [7] 斎藤 克幸. 多次元尺度構成法. 統計ライブラリー. 朝倉書店, 1980.