２次元交通流系の相図

石橋善弘[1]，福井稔[2]

[1]名古屋大学，[2]中日本自動車短大

概要

２次元交通流系の相図の持つべき対称性と１次元系との整合性をもとに、臨界密度曲線を東行き、北行き車両密度 p, q で表した。それをもとに渋滞流相における最終定常状態での flow の表式を仮定し、それから自由流・渋滞流相境界を得た。この相境界の妥当性は、simulation によって概ね確認できた。

The Phase Diagram of the Two-dimensional Traffic System

Yoshihiro Ishibashi[1], Minoru Fukui[2]

[1]Department of Applied Physics, Nagoya University

[2]Nakanihon Automotive College

Abstract

On taking into account the symmetry of the two-dimensional traffic system and the consistency with the one-dimensional system, the expression of the critical density line in the phase diagram was obtained in terms of the densities of the east-bound and the north-bound cars. On assuming the flow in the jam-flow phase so that it should be consistent with the critical density line, the expression of the boundary between the free-flow and the jam-flow phases was obtained. Validity of this phase boundary could be confirmed by computer simulation.

１．はしがき

Nagatani[1], Wang[2]等によって２次元交通流系における臨界密度およびそれと関係する相図が理論的に与えられているが、以下の２点から彼らの理論は受容しがたい。第１に、東向き車の密度 p、北向き車の密度 q の一方を０とすると、１次元系に reduce できるが、彼らの理論では１

次元系で得られている知見、例えば flow(f)の密度依存性[自由流相（$0 < p \leq 1/2$）で $f = p$、渋滞流相（$1/2 \leq p < 1$）で $f = 1 - p$]とスムーズにつながらない。第２に、彼らの理論では２次元系にも存在する自由流相が説明できない。

ここでは、全く別の視点から、２次元交通流系の相図の理論を提示する。なお、ここでいう２次元($N \times N$)交通流系のモデルでは、$N = 400$、東向き・北向きとも最高速度 $V_{\max} = 1$, 初期配列では東(北)向き車の車数は各レーンとも同じ数 $n_{p(q)}$ である。従って密度はレーン毎に p (q)（$= n_{p(q)}/N$）である。また、車の動きは、周期境界条件の下に東・北向きを交互に up-date する。

２. 臨界密度曲線

横軸に p, 縦軸に q をとって臨界密度を p, q の関数として書くと、臨界密度曲線は、（i）p, q に関して対称であること、（ii）１次元系との整合性から、点（p, q）=（1, 0） および （p, q）=（0, 1)を通るべきであることから、

$$A\,[1-(p+q)] - B\,p\,q = 0 \qquad (1)$$

となる。ただし、ここでは１次と２次の対称項だけを採用した。ただし、$p^2 + q^2$ は曲線の凹凸性(Curvature)が求めているものに合わないので採用していない。（１）式において、$A = 1$ としてよいので adjustable parameter は B だけであるが、simulation の結果 $p_c = q_c = 0.2$ を用いれば、$B = 15$ ときまる[3]。

３. 渋滞流相の flow と自由流・渋滞流相境界

今、（１）式左辺は渋滞流相の flow f をあらわす、つまり

$$f = [1-(p+q)] - B\,p\,q \qquad (2)$$

と仮定すると、改めて $f = 0$ が臨界密度に対応すると解釈しなおすことは自然である。ただし、これは単なる仮定であって、これから導かれる諸々の帰結は、全て何らかの方法でその正当性を確認されなければならない。

この仮定にたてば、自由流相・渋滞流相の境界は

$$(p+q)\,V_{\max} = [1-(p+q)] - B\,p\,q \qquad (3)$$

から求められる。(３)式の左辺は自由流、右辺は渋滞流の flow を表している。$p = q$ のとき、(３)式から $p_c = q_c = 0.157$ が得られるが、これは simulation により得られた値、約 0.16 とほぼ一致

している（第１図)。したがって、（２）式を渋滞流相の flow *f* と仮定した事は大体よさそうである。　また、(３) 式から得られた自由流相・渋滞流相の境界を参考にして選んだ相 I(自由流相)、相 II(渋滞流相)での流れのパターンを第２図（a）, (b)に示す。相 III(完全停止相)は第２図(c)に示す。

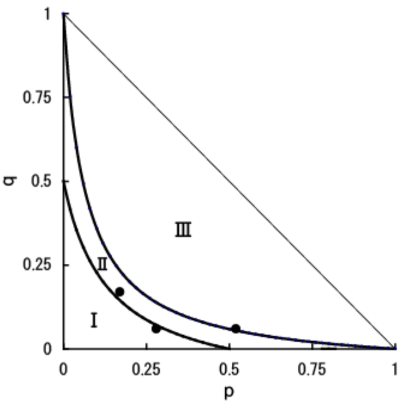
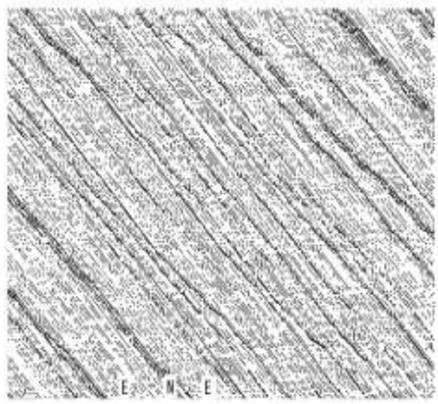
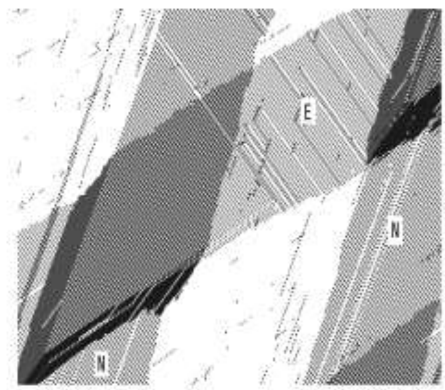


図１　２次元交通流系の相図
（Ⅰ:自由流相,　Ⅱ:渋滞流相,　Ⅲ:完全停止相）
図中の黒丸は、図２のスナップショットの
観測点を示す。

(a) 自由流相



(b) 渋滞流相



(c)　完全停止相

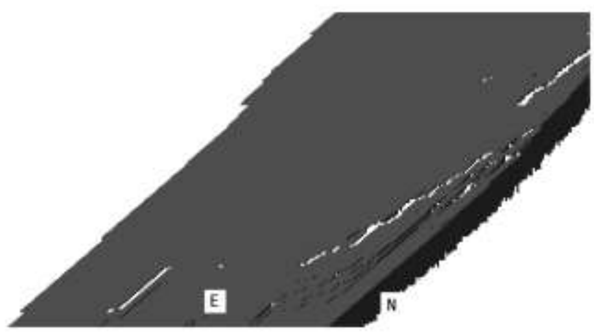


図２　流れのスナップショット

(a)自由流相(p=0.28,q=0.06)

(b)渋滞流相(p=0.17,q=0.17)

(c)完全停止相(p=0.52, q=0.06)

図中の E,N はそれぞれ東向き, 北向き車両を表す。

さて、相 II(渋滞流相)での flow は、

$$p\,v_x + q\,v_y = [1-(p+q)] - B\,p\,q \qquad (4)$$

と表す事ができる。（4）式で右辺が p, q に関する対称式であるから左辺もそうでなければならない。このことから、$v_x = v_y = v$ であることがわかる。これは、２次元交通流系では「東向き、北向きの車の速度が等しくなる」という原則に従って秩序が形成されるということを意味している。これは、これまで認識されてこなかった事柄であるが、実際に simulation で確認できた。

４．この理論の問題点 ― 結語にかえて

２次元交通流系の相図の持つべき対称性と１次元系との整合性をもとに、臨界密度曲線を車密度 p, q で表した。それをもとに、渋滞流相における最終状態（時間が十分経過したした後での状態）での flow の表式を仮定し、それから自由流・渋滞流相境界を得た。その相境界は、simulation によっておおむね確認された。また、２次元交通流系では、東・北向き車の速度が等しくなるというに原則に従って秩序が形成されるらしいことがわかった。

以上の様に、本理論は２次元交通流系に関して新しい知見を付け加えたが、まだ重要な未解決問題が残っている。すなわち、系の最終定常状態での flow は車の初期分布に強く依存する事が知られているが、本理論では、flow や速度 v_x, v_y の初期分布依存性は全く考慮されてはいない。特に、初期分布の影響が最も顕著に現れるのは渋滞流相での車の速度であるが、simulation で得られる車の速度が、本理論に基づく定量的予測と大体一致する場合と一致しない場合がある。したがって、車の初期分布と最終定常状態との関係を明らかにすることが必要かつ望ましいことは言を待たない。しかし、それは一朝一夕に解決できるような簡単な問題ではないだろう。

このように重要な未解決問題を残してはいるが、少なくとも１次元系との整合性において、本理論は既存の理論より一歩前進したものになっている。それ故、今後の２次元交通流理論の展開に際して一助となる事が期待できる。

参考文献

[1] T. Nagatani, J. Phys. Soc. Jpn. 62 (1993) 2656. Phys. Rev. E48 (1993) 3290-3294.

[2] B. H. Wang, Y. F. Woo and P. M. Hui, J. Phys. A:Math. Gen. 29 (1996) L31-L35. J. Phys. Soc. Jpn. 65 (1996) 2345-2348.

[3] Y. Ishibashi and M. Fukui, Physica A393 (2014) 475-479.