Λ 形流量特性を持つ道路網における定常流状態の安定性

島田尚 [1] (shimada@ap.t.u-tokyo.ac.jp), 吉岡直樹 [2], 伊藤伸泰 [1,2]

[1] 東京大学大学院工学系研究科物理工学専攻
[2] RIKEN AICS

概要

Λ 形流量特性（基本図）を持つ道路によって構成された簡単なトポロジーの道路網について、交通量定常の状態の線形安定性解析を行った。特に道路の基本図特性が均一である場合について、非常に簡単な安定性判定条件が解析的に得られた。一般的に、特に系が大きい極限では渋滞相にある道路区間が一つでもある限りその定常流状態は不安定である。

Linear stability of steady flow states in networked roads with piece-wise linear fundamental diagrams

Takashi Shimada[1], Naoki Yoshioka[2], and Nobuyasu Ito[1,2]

[1] Department of Applied Physics, Graduate School of Engineering, The University of Tokyo
[2] RIKEN AICS

Abstract

Linear stability of a steady flow state in road networks, each of its road edges has a Λ-shaped peace-wise linear fundamental diagram, is analyzed. Simple conditions to discriminate the stability are obtained analytically for the systems consist of roads with uniform characteristics. In the large size limit, the steady flow state is unstable if there is one or more jammed roads.

1　はじめに

一本の道路における交通流の密度-流量関係、すなわち基本図とその理解は渋滞現象の研究において本質的な役割を果たしてきた [1]。現実の道路網での渋滞現象の理解を目指す第一歩として、このような非線形流量特性をもった輸送路として道路の振る舞いを粗視化した場合について考えるのが妥当であろう。本研究では、取り扱いの簡単な基本図をもった道路を簡単なトポロジーで結んだ系について流量定常な状態の安定性解析を行う。

2　問題設定

2.1　基本図（密度ー流量関係式）

道路はそれぞれ Λ 型の区分的に線形な基本図（密度-流量関係式）：

$$F_i(\rho) = \begin{cases} f_i\rho & (\rho < \rho_i^*) & \text{（自由走行相）} \\ -g_i\rho + (f_i+g_i)\rho_i^* & \left(\rho_i^* \le \rho < \left(1+\frac{f_i}{g_i}\right)\rho_i^*\right) & \text{（渋滞相）} \\ 0 & \left(\left(1+\frac{f_i}{g_i}\right)\rho_i^* < \rho\right) & \text{（完全渋滞相）} \end{cases} \tag{1}$$

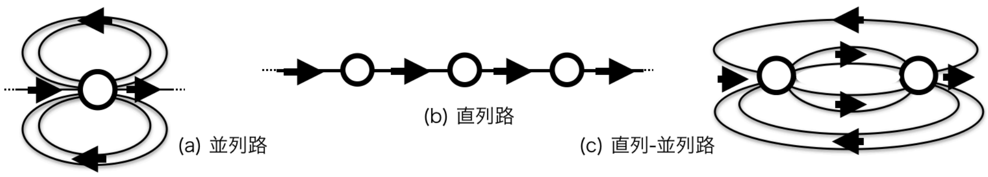

図 1: 本研究で考慮する簡単な道路網の構造。丸は交差点を、線と矢印は道路とその通行の向きを表す。

を持つとする。ここで ρ_i^* は道路 i が自由走行相から渋滞相へ移る臨界密度で、基本図の折れ線の傾きの絶対値を表す f_i 及び g_i は正の実数である。自由走行領域での道路流量の線形な密度依存性は自然な近似で、またその傾き f_i は制限速度やカーブのきつさ、見通し、車線当たりの道幅などのスピードの出し易さの違いに対応する。渋滞相での流量低下率を表す g_i の決まり方はより複雑であるが、一般に道路の特性よりもドライバーと車の特性に強く依存すると考えられる。

2.2 道路網の構造と交差点

本研究では、図 1 に示すような簡単な「道路網」について考える。これらは道路網と呼ぶには明らかに簡単すぎる例であるが、(a) 並列路は「ある道路が混むと競合する他の道路が空く」という効果の、(b) 直列路は進行方向に影響が伝播する効果の、そして (c) 直列-並列路はこれら二つの効果の両方がある場合の、それぞれミニマルモデルと位置づけることができる。簡単のため各道路の長さは均一とし、また、交差点からの流出については「交差点に流入した車は全ての流出路に均等に分配される」というルール（均等分配ルール）について考える。

3 結果

3.1 周期的 N 並列道路の定常流量状態の線形安定性

まず初めに N 本の流出路と、その各々が同じ交差点に戻って来た N 本の流入路からなる「周期的 N 並列道路」の系（N-bin model, 図 1 (a)）について考える。この系の各道路の密度 ρ_i の時間発展方程式は

$$\dot{\rho}_i = -F_i(\rho_i) + \sum_{j=1}^{N} \frac{F_j(\rho_j)}{N} \tag{2}$$

となる。以下では、全ての道について $\dot{\rho}_i = 0$ となる定常交通流状態 $\bar{\boldsymbol{\rho}}$ が存在したとしてその状態からの微小なずれ $\boldsymbol{\delta\rho}$ が時間的に拡大することがないかどうかを問題とする。このためには時間発展方程式 (2) を定常流状態の周りで線形化した方程式 $\dot{\boldsymbol{\delta\rho}} = L_{ij}\boldsymbol{\delta\rho}$ を考え、線形化行列 $L_{ij}(\bar{\boldsymbol{\rho}}) = \left.\frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \rho_j}\right|_{\bar{\boldsymbol{\rho}}}$ の固有値を調べればよい。基本図 (1) の区分線形性のおかげで、線形化行列の計算には各道路の流量そのものではなく、各道路が自由走行相にあるか渋滞相にあるかという情報だけがあれば良い。そこで $N(\geq 2)$ 本の道路のうち $n(\geq 1)$ 本が自由走行相、$m(\geq 1)$ 本が渋滞相にあるような定常流状態を考えるとその線形化行列は

$$L_{ij} = \left.\frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \rho_j}\right|_{\bar{\boldsymbol{\rho}}} = \left(\frac{1}{N}\right) \begin{pmatrix} -(N-1)f_1 & f_2 & \cdots & f_n & -g_{n+1} & \cdots & -g_N \\ f_1 & -(N-1)f_2 & \cdots & f_n & -g_{n+1} & \cdots & -g_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1 & f_2 & \cdots & -(N-1)f_n & -g_{n+1} & \cdots & -g_N \\ f_1 & f_2 & \cdots & f_n & (N-1)g_{n+1} & \cdots & -g_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1 & f_2 & \cdots & f_n & -g_{n+1} & \cdots & (N-1)g_N \end{pmatrix} \tag{3}$$

となる。この線形化行列の固有値に正のものが一つでもあれば、それは定常流状態からのずれが時間的に拡大する方向があることを意味するのでその状態は不安定である。一方、全ての固有値が非正であればその定常流状態は安定である。固有値を λ, $\tilde{N} \equiv N-1$ とすれば固有方程式は

$$det \begin{pmatrix} -\tilde{N}f_1 - N\lambda & f_2 & \cdots & f_n & -g_{n+1} & \cdots & -g_N \\ f_1 & -\tilde{N}f_2 - N\lambda & \cdots & f_n & -g_{n+1} & \cdots & -g_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1 & f_2 & \cdots & -\tilde{N}f_n - N\lambda & -g_{n+1} & \cdots & -g_N \\ f_1 & f_2 & \cdots & f_n & \tilde{N}g_{n+1} - N\lambda & \cdots & -g_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1 & f_2 & \cdots & f_n & -g_{n+1} & \cdots & \tilde{N}g_N - N\lambda \end{pmatrix} = 0$$

であるが、列方向にかなり行列要素が揃っているので 1 行目から順に一つ下の行を引く変形を繰り返した次の行列について計算すれば良い

$$det \begin{pmatrix} d_1 & -d_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & -d_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n & -e_{n+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & e_{n+1} & -e_{n+2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & e_{N-1} & -e_N \\ f_1 & f_2 & f_3 & \cdots & f_n & -g_{n+1} & -g_{n+2} & \cdots & -g_{N-2} & -g_{N-1} & e_N - g_N \end{pmatrix} = 0. \tag{4}$$

ただしここで見やすいように $d_i \equiv -N(f_i + \lambda), \quad e_i \equiv N(g_i - \lambda)$ と書き直した。この行列式は余因子展開により容易に計算でき、固有方程式：

$$\begin{aligned} 0 &= f_1 d_2 d_3 \cdots d_n e_{n+1} e_{n+2} \cdots e_{N-1} e_N + d_1 f_2 d_3 \cdots d_n e_{n+1} e_{n+2} \cdots e_{N-1} e_N \\ \cdots &\quad + d_1 d_2 d_3 \cdots f_n e_{n+1} e_{n+2} \cdots e_{N-1} e_N + d_1 d_2 d_3 \cdots d_n (-g_{n+1}) e_{n+2} \cdots e_{N-1} e_N \\ \cdots &\quad + d_1 d_2 d_3 \cdots d_n e_{n+1} e_{n+2} \cdots (-g_{N-1}) e_N + d_1 d_2 d_3 \cdots d_n e_{n+1} e_{n+2} \cdots e_{N-1} (e_N - g_N) \end{aligned} \tag{5}$$

が得られる。この N 次方程式からまず分かることは、**これだけ簡単な場合でも道路特性がそれぞれ異なる一般の場合の安定性の判別は簡単でない**ということである。

そこで次に道路の基本図の特性が均一な場合について考えると[1] 、

$$f_i = f, \quad g_i = g, \quad d_i = d = -N(f + \lambda), \quad e_i = e = N(g - \lambda) \tag{6}$$

なので固有方程式 (5) は

$$d^{n-1} e^{m-1} (nfe - mdg + de) = 0 \tag{7}$$

となる。自由走行相のパラメタから決まる $(n-1)$ 次に縮退した固有値：$d = 0 \to \lambda = -f$ は常に負であり、一方渋滞相のパラメタから決まる $(m-1)$ 次に縮退した固有値：$e = 0 \to \lambda = g$ は常に正である。このことよりまず、**渋滞相にある道路が２本以上ある定常状態は常に不安定**であることが分かる。また、$m = 0$ の場合についての固有方程式は同様の計算から $d^N = 0$ となるので、**全ての道路が自由走行相にある定常状態は常に安定**であることも分かる。渋滞相にある道路が一本だけの場合（$m = 1$）の安定性は縮退していない解：$(N-1)fe - dg + de = 0$ によって決まる。この式を整理すると

$$\lambda \left[\lambda - \frac{(N-1)g - f}{N} \right] = 0 \tag{8}$$

[1] 自由走行相と渋滞相の道路とに完全に分かれていれば特性の異なる２種類の道路で構成されていても良い。また、ρ_i^* が違うだけ（ρ_i を車の線密度とすれば、「車線数が違うだけ」）で f_i, g_i が同じである道路については均一な場合に含まれることに注意。

となるので、0 でない方の固有値が非正である条件：$g \leq \dfrac{f}{N-1}$ が定常状態が安定であるための条件であることが分かる。以上より、均一な特性を持つ道路により成る N 並列路の定常流状態については、渋滞相にある道路の本数と基本図の特性値とから簡単にその安定性が判定できることが分かった。特に $N \to \infty$ の極限では、すべての道路が自由走行相にあるかどうかだけで安定性が決まる。

3.2 直列路、直列-並列路の場合も含めた安定性判定条件のまとめ

(b), (c) の場合についても、紙数の関係上詳細は省くが並列路の場合と基本的に同様の工夫で定常流状態の安定性が解析的に評価でき、特に基本図の傾きパラメターが同一の場合についてはコンパクトな結果が得られる。定常流状態の安定性についての以上の結果をまとめると以下のようになる（表記の簡単のため、均一な道路の自由走行相の傾き $f_i = f$ を 1 ととった）。

(a) N 本の道路が並列に接続されている場合

- (i) 全ての道路が自由走行相にある場合は常に安定
- (ii) １つの道路のみ渋滞相にある場合、$g \leq \frac{1}{N-1}$ であれば安定、さもなくば不安定
- (iii) ２つ以上の道路が渋滞相にある場合は常に不安定

(b) N 本の道路が直列に接続されている場合

- (i) 全ての道路が自由走行相にある場合は常に安定
- (ii) １つの道路のみ渋滞相にある場合、$g \leq \frac{1}{N-1}$ であれば安定、さもなくば不安定

(c) N 並列の道路と K 並列の道路が直列に接続されている場合

- (i) 全ての道路が自由走行相にある場合は常に安定
- (ii) N 並列路のうちの 1 つが渋滞相にある場合、$g \leq \frac{K}{(2K-1)N}$ であれば安定、さもなくば不安定
- (iii) ２つ以上の道路が渋滞相にある場合はその配置（同じ並列区間にあるか、別の区間にあるか）に依らず常に不安定

4 結論

以上、区分線形という簡単化した基本図と特殊なトポロジーの道路網の場合について、均等分配ルールのもとでの定常交通流状態の安定条件が求まった。大雑把に言って、結合のトポロジーに依らず複数の道路が（道路網の規模が大きい極限ではひとつでも）渋滞相にある場合はその流量分布は不安定で、どこかの道路が完全に渋滞する状態へと悪化する傾向があることが分かる。面白いことに、このような巨視的な振る舞いは正方格子などより現実的な道路網における巨視的流量特性とも密接に関連していることが分かってきている [2]。また、交通制御の観点からは、今回得られた厳しい安定性条件は道路のトポロジーの特殊性というより「均等分配ルール」というある意味最悪の場合に導き出された最悪条件であるとも言えよう。より賢い信号制御の良さを議論する際には必要不可欠な、所与の道路網と交通量の条件の厳しさの目安を与えるという点でも本研究の結果は有用であると考える。

謝辞

本研究は JST, CREST の支援を受けたものである (This work was supported by CREST, JST)。

参考文献

[1] Y. Sugiyama, M. Fukui, M. Kikuchi, K. Hasebe, A. Nakayama, K. Nishinari, S. Tadaki, and S. Yukawa, New J. of Physics **10** (2008) 033001.

[2] N. Yoshioka, T. Shimada, and N. Ito, *in preparation*