

歩行者流振動の数理モデル

鈴木浩大

明治大学大学院先端数理科学研究科

概要

ボトルネックを通過する歩行者流にみられる振動現象について、数理モデリングのアプローチによるメカニズム理解を与える。この「歩行者流振動」は数値的にも実験的にも観測され、歩行者流における自発的パターンのひとつとして知られている。本論文ではこの振動現象に関する数理モデルの構成と解析を行い、この振動現象が van der Pol 型自励振動として理解できることを示す。

A mathematical model of oscillatory pedestrian flow

Kohta SUZUNO

Graduate School of Advanced Mathematical Sciences

Abstract

We investigate oscillations in pedestrian flow at bottlenecks via mathematical modeling. This “pedestrian flow oscillator” has been observed both numerically and experimentally and known as an example of self-organization in pedestrian systems. In this paper, we construct a model that describe the oscillatory flow and investigate its mechanism. Through an analysis of the model, we show that it is identified as a van der Pol-type self-excited oscillation.

1 イントロダクション

歩行者流は交通流の研究対象のひとつであり、群集の集団運動や輸送特性を考察するための系として注目を集めている。その重要性の一つは歩行者流が様々な自発的パターンを示す点にある。歩行者流はレーン形成、クラスタリング、アーチ作用等のパターンを自発的に生成することが観測やシミュレーションから示されている [1, 2]。その一例として、ボトルネックを通過する歩行者流における振動現象 [1] がある。その概要を Fig. 1 に示す。細長いチャンネル（通路）の中央にボトルネックを設置し、その両側から、互いに逆向きの駆動力を持った粒子を多数投入する。やがてボトルネックにおいて右向きと左向きの流れが交互に入れ替わる振動流が自発的に表れる。この「歩行者流振動子」は、粒子シミュレーションでこの現象が示されて以降 [1]、歩行者流の自発的パターンの一例として広く知られることとなった。またこの振動現象は歩行者を使った実験でも確認されている [3]。ただし、この現象のメカニズムは定性的にしか考察されていない [7]。さらに近年、数値的な分岐解析の立

場から、この振動がボトルネック幅を分岐パラメータとする超臨界ホップ分岐として理解できることが示された [4]。しかし、分岐の物理的背景や振動のメカニズムに関する考察は与えられていない。

これらを背景として、本研究では歩行者流振動に対する数理モデルを構成し、その解析から振動現象のメカニズムを議論する。ボトルネック付近の粒子の運動に着目し、特徴からシンプルな現象論的モデルを構成する。次いでそのモデルが振動解を持つ事、解がボトルネック幅をパラメータとして分岐する事を示す。さらに分岐の起源について物理的な観点から考察を与える。

2 振動流の概要

まず数値シミュレーションによって歩行者流振動の性質を調べる。ここで用いるモデルは the social force model [1] から排除体積効果に係わる項を除外した粒子モデルである。このモデルでは N 個の粒子系において、粒子 i は自己駆動力 F_i^{self} 、二体相互作用 F_{ij} および粒子-壁面相互

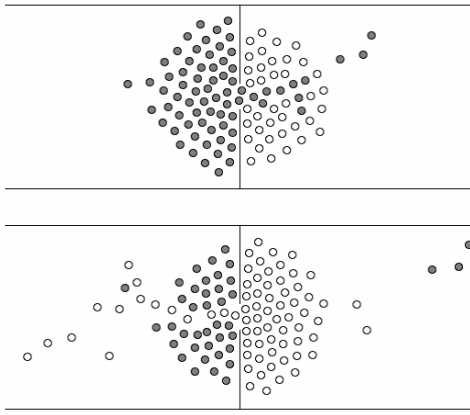


Fig.1: 歩行者流振動. チャンネルの中央にあるボトルネックを、対面走行する粒子が通過する. 粒子流の向きは時間と共に交代する.

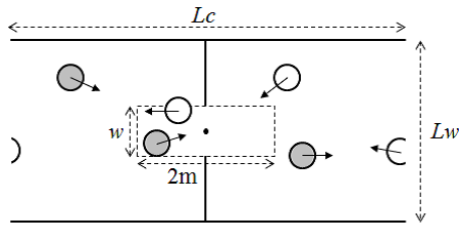


Fig.2: 粒子シミュレーションの境界条件.

作用 F_{iw} を持ち、運動方程式に従う. なお壁で隔てられた粒子同士は相互作用しない. ここで用いるパラメータは $m=80$ kg, $\tau=0.5$ s, $A=573$ N, $B=0.08$ m, $N=100$, $L_c=45$ m, $L_w=5$ m とした.

境界条件は Fig. 2 に示すとおりである. 両端は周期境界条件によって接続されている. チャンネル中央には幅 w のボトルネックを設置する. 粒子の駆動力 $v_0 e_i$ は、ボトルネック通過前はボトルネック中央を向いており、通過後は進行方向の無限遠方を向くベクトルである.

主要な結果は次のとおりである. Fig. 3 はボトルネック近傍の運動量密度の時間変化である. ここでいう近傍とはボトルネックを中心とした幅 w , 長さ 2 m の長方形領域のことである. ここでパラメータはボトルネック幅 $w=0.7$ m, 駆動力 $v_0=1$ m/s としている. 図が示すとおり, 系の運動量は周期的に逆転している. なお振動は周期境界条件を取り除いても起こる (この場合はもちろん系の粒子数は時間と共に減少していく) ため, 周期境界はこの振動現象の励起に関して本質的ではない.

次に, 振動のボトルネック幅依存性を考える. ボトルネック幅を $0.58 \text{ m} \leq w \leq 0.72 \text{ m}$

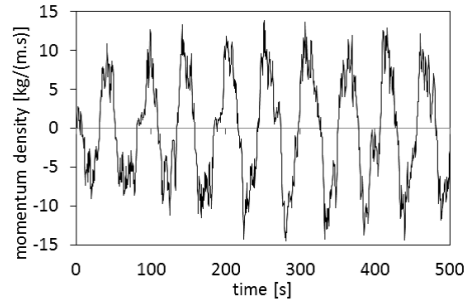


Fig.3: ボトルネック近傍における運動量密度の時間変化.

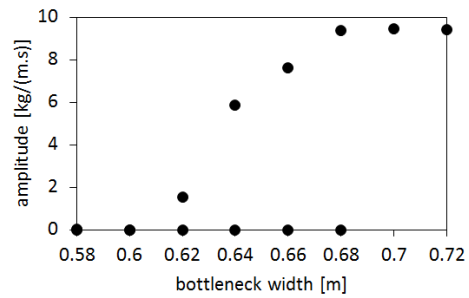


Fig.4: ボトルネック幅 w をパラメータとした分岐図.

($dw=0.02$ m) の範囲で変化させ, 得られた振動の時系列から振幅をフーリエ変換によって求める. その結果を Fig. 4 に示す. 図において, w が小さい領域では振幅が 0 であり, w を大きくすると振動状態への転位が起こる. また両者の中間領域では双安定な領域が存在する.

この系には周期的外力が存在しないため, 振動は自発的なものである. この背後にはある種の不安定性, すなわちひとつの粒子がボトルネックを通過すると後続粒子は抵抗が少ないために先行粒子に続きやすく, それがますます対向粒子を押しつけて後続粒子を通りやすくするという機構があるように思われる. このようなメカニズムは例えば対向する荷電粒子流等にも見られ, その密度の不安定増大は two-stream instability として知られている [5, 6]. その基本的な性質は密度を n として $\frac{dn}{dt} \propto n$ と理解される [5]. 本論文では歩行者流振動もこのタイプのメカニズムが関与し, これが系のポジティブ・フィードバックを与えていると考える.

一方, 片方の勢力の粒子が流れ続けると, ボトルネックの左右で粒子数に差が生じ, 流れと逆向きの圧力が生じる. これが粒子流を逆転させるネガティブ・フィードバックである.

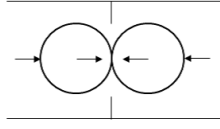


Fig.5: 元の多粒子系を簡略化したモデル.

3 モデリング

以上の考察をもとに、歩行者流振動の本質的部分を取り出した数理モデルを構成する. ここでボトルネックの左から右へ向かう粒子を粒子1, 逆向きのそれを粒子2と呼ぶことにする. また左から右への向きを正の向きとする.

ボトルネック近傍にかかっている力は, そこに存在する粒子の駆動力と, それらが後方から受ける圧力の和で決まる. この描像を元にモデルを構成するために, ボトルネック近傍の粒子1と2の振る舞いをそれぞれ代表する2つの代表粒子を考える (Fig. 5). 元の系の振動はこの簡略化された系における代表粒子の押し合いとして表現される.

まず駆動力について考える. 代表粒子系の駆動力は, 粒子固有の駆動力 (the social force model における駆動力) と, ボトルネック近傍に存在する粒子 i の数に比例すると考える. ここでボトルネック近傍に存在する粒子 i の存在割合を n_i , 代表粒子の速度を v とする. n_i は $0 \leq n_i \leq 1$ であり $n_1(v) + n_2(v) = 1$ と規格化されている. 流れの速度が正の場合, ボトルネック近傍には粒子1が多く存在することになるため, n_1 は v の広義単調増加関数であり, 逆に n_2 は減少関数である. 以上をまとめると, 対向する代表粒子系の全駆動力は

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{m}{\tau}(v_0 - v)n_1(v) + \frac{m}{\tau}(-v_0 - v)n_2(v) \\ &= -\frac{m}{\tau}v + \frac{m}{\tau}v_0n(v) \end{aligned} \quad (1)$$

となる. ここで規格化条件を用い, $n_1(v) - n_2(v) \equiv n(v)$ と定義した.

次に圧力について考える. ボトルネック近傍にかかる圧力はボトルネック両側の全粒子数の差 $N_1 - N_2$ と駆動力 v_0 に比例すると考え, $F_2 = c_1v_0(N_1 - N_2)$ と表現する. また $N_1(N_2)$ は流れの速度が正 (負) の時にボトルネック通過に伴い減少するので, これを

$$\frac{dN_i}{dt} = (-1)^i c_2 v \quad (i = 1, 2) \quad (2)$$

と表す. 上式を積分し, F_2 に組み込むと結局

$$F_2 = -kx \quad (3)$$

となる. ここで $k \equiv 2c_1c_2v_0$ である. x は代表粒子系の重心位置である.

以上より, 代表粒子の運動方程式は

$$\tau \frac{dv}{dt} = -v + v_0n(v) - \frac{k\tau}{m}x \quad (4)$$

で与えられる. あとは $n(v)$ の関数形を与えればモデルは閉じる. 定義より, $n(v)$ は $-1 \leq n(v) \leq 1$ をとる広義単調増加関数である. $n = \pm 1$ はそれぞれボトルネック近傍が粒子1または2のみで占有されている状態に, $n(0) = 0.5$ は粒子1と2の数が均衡している状態に対応する. ここではひとつの可能な表現として

$$n(v) = \begin{cases} +1 & (v > v_c) \\ a_1v + \frac{1}{3}a_2v^3 & (-v_c \leq v \leq v_c) \\ -1 & (v < -v_c) \end{cases} \quad (5)$$

とする (Fig. 8). ただし v_c は $n(v_c) = 1$ を満たす数である. 上式と運動方程式 (4) が最終的なモデル方程式である. このモデルにおいて a_1, a_2 はボトルネック幅に対応するパラメータである. これらの値を大きくすると $n(v)$ の成長率が大きくなり, それは元の多粒子系 (the social force model) においてボトルネックが広く粒子が一気に流れる状況に対応する.

次に, 以上で得たモデル方程式の解を数値的に求める. ここでは簡単のため $a_1 = 0$ とし, a_2 を分岐パラメータとして初期条件 $(x(0), v(0)) = (0, 0.2), (0, 0.6)$ および $(0, 1.5)$ の3つのケースについてその時間発展を計算する. ここで $m=80$ kg, $\tau=0.5$ s, $c=1000$ kg/m, $v_0=1$ m/s とした. Fig. 6, 7 に示したとおり, 解は a_2 の値に応じて分岐を起す. この結果を, a_2 をパラメータとする分岐曲線で表すと, その様相は Fig. 7 右下のような垂臨界型となる. 元の粒子系における描像と比較すると, a_2 が小さい場合はボトルネック幅が狭く振動しない状態, a_2 が大きい場合は幅が大きく歩行者流振動が起っている状態に対応する. また Fig. 7 の a_2 を分岐パラメータとする分岐構造は, 粒子シミュレーションにおいてボトルネック幅 w を分岐パラメータとした分岐構造 (Fig. 4) の垂臨界的振る舞いを定性的に再現している. このことから, 本モデルは歩行者流振動の本質的特徴を捉えていると考えられる.

4 考察

このモデル方程式が何故自励振動を示すかをさらに詳しく分析する. このモデルにおける振動の起源は, $n(v)$ の関数形にある. $n(v)$ は切断 $|n(v)| = 1$ を含む奇関数であり, Fig. 8 に示すとおり, 大雑把な近似で $n(v) \sim v^3 - v^5$ と書ける. これを運動方程式の他の項と合わせる

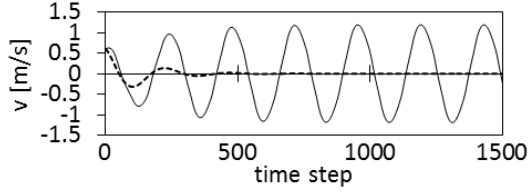


Fig.6: モデル方程式の解 v の時間発展 ($a_1 = 0$, $v(t=0) = 0.6$). 実線は $a_2 = 12$, 破線は $a_2 = 3$ の場合を示している.

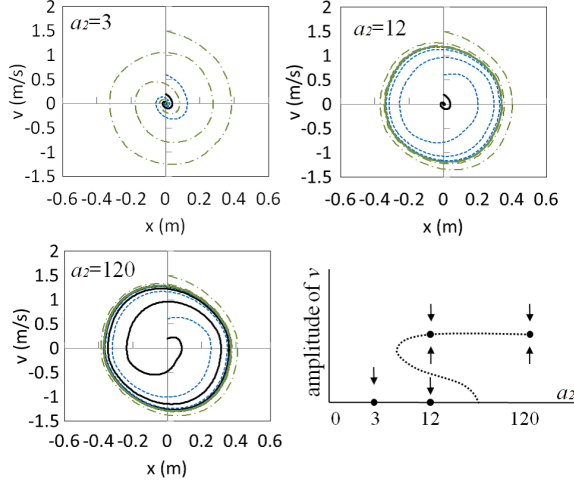


Fig.7: モデル方程式の解. (左上) $a_2 = 3$ の時の解. (右上) $a_2 = 12$ の時の解. (左下) $a_2 = 120$ の時の解. 実線, 破線, 一点鎖線はそれぞれ速度の初期値が $0.2, 0.6$ および 1.5 の解に対応する. (右下) 以上から得られた平衡点の位置をパラメータ a_2 の関数として描いた模式的な分岐図.

と, 運動方程式のおおまかな関数形は

$$\frac{dv}{dt} \sim -v + v^3 - v^5 - kv \quad (6)$$

となり, これは 5 次の非線形項を持つ van der Pol 方程式と等価である. この結論は $n(v)$ の詳細によらない. というのは, $n(v)$ に要請されているのは $|n(v)| \leq 1$ を満たす単調増加な奇関数であることだけであり, そのテイラー展開は奇数次の多項式となるため, モデル方程式は $n(v)$ の関数形の詳細によらず van der Pol 型となる.

但し分岐のタイプは多項式の係数によって決まることから $n(v)$ の選択に依存する. このモデルはパラメータ a_1, a_2 の選び方によっては超臨界型の分岐を示す. $n(v)$ における a_1 および a_2 の選び方は結局のところ不安定性の関数形をどのようにデザインするかという問題であり, それは元の多粒子系における粒子のパラメータや相互作用の性質に依存して決まる. よって本論文

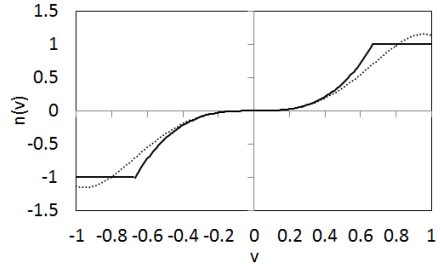


Fig.8: $n(v)$ の関数形とその多項式近似. 実線は (5) 式 (ただし $a_1 = 0, a_2 = 10$), 破線は (5) の多項式に適当な 5 次の負係数項を加えたもの.

の結果は先行研究の結果 [4] とは矛盾しない.

振動の起源となるポジティブ・フィードバックはボトルネック近傍の粒子数の不安定性にある. 実際 $\frac{dn}{dt} = \frac{dn}{dv} \frac{dv}{dt}$ に (4) を代入すると, $\frac{dn}{dt} \propto n$ 型の不安定な粒子数増加が起こりうるということがわかる. これがこの系のポジティブ・フィードバックである.

5 結論

本論文では歩行者流に見られる振動現象を解析するための現象論的数理モデルを構成した. その解析結果から次の結論を得た. (i) 歩行者流振動は van der Pol 型自励振動である. (ii) 振動はボトルネック幅をパラメータとして亜臨界型の分岐を起こす. (iii) 振動は, ボトルネックにおける two-stream instability 型の密度不安定と系全体の圧力によるその抑制によって実現している. さらに興味ある話題としては, 複数の歩行者流振動の同期 [8] 等があり, 今後の研究が待たれる.

References

- [1] D. Helbing *et al.*, Phys. Rev. E **51**, 4282 (1995).
- [2] D. Helbing *et al.*, Nature **407**, 487 (2000).
- [3] D. Helbing *et al.*, Transp. Sci. **39**, 1 (2005).
- [4] O. Corradi *et al.*, SIAM J. Applied Dynamical Systems **11**, 1007 (2012).
- [5] C. K. Birdsall and A.B Langdon, Plasma Physics via Computer Simulation, Taylor and Francis (2004).
- [6] H. Löwen *et al.*, Soft Matter, **6**, 3133(2010).
- [7] D. Helbing *et al.*, Environment and Planning B **28**, 361 (2001).
- [8] D. Helbing *et al.*, arXiv:cond-mat (1998).