

# 時間遅れをもつ交通流モデルの離散化及び超離散化

松家敬介<sup>1,2</sup>, 金井政宏<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 東京大学大学院数理科学研究科

<sup>2</sup> 数理科学連携基盤センター/生物医学と数学の融合拠点 (iBMath)

## 概要

本講演では, Newell が提案した時間遅れ微分方程式で記述される交通流モデルの離散化及び超離散化 (セルオートマトン化) を紹介する. 今回扱う時間遅れ微分方程式は, ソリトン方程式の一つである modified Lotka–Volterra 方程式 (mLV) との関連が指摘されている. (mLV) にはソリトン解の構造を保つ離散化及び超離散化が報告されており, この手法に倣って離散化及び超離散化を行う. また, 離散化及び超離散化で得られた差分方程式は時間遅れをもち, それらの進行波解の性質についても議論する.

## Discretization and ultradiscretization of a traffic flow model with time delay

Keisuke Matsuya<sup>1,2</sup> and Masahiro Kanai<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo*

<sup>2</sup> *Interdisciplinary Center for Mathematical Sciences/Institute for Biology and Mathematics of Dynamical Cell Processes*

## Abstract

In this talk, we propose a discretization and an ultradiscretization (or a cellular automaton) of Newell’s traffic model described by a delay–differential equation. There is a close relationship between Newell’s model and the modified Lotka–Volterra equation, which is one of the soliton equations. The general methods of discretization and ultradiscretization have been established for the soliton equations. Applying the similar method, we construct the discretization and the ultradiscretization of the delay-differential equation. Moreover, we will discuss traveling wave solutions for the obtained delay-difference equations.

## 1 はじめに

本稿では, Newell が提案し [1], Whitham が特殊な場合において進行波解を与えた [2] 交通流モデル:

$$\frac{dx_n}{dT}(T + \tau) = V(h_n) \quad (*)$$

を扱う. ただし,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $\tau > 0$ ,  $x_n := x_n(T)$ ,  $T \geq 0$ ,  $h_n := x_{n+1} - x_n$ .

このモデルは,  $x$  が車の位置を表し, 車間距離  $h$  に対して, 関数  $V(h)$  が最適な速度を返すものとなってい

る. また, このモデルは戸田格子との対応などから, 楕円関数解が存在することが知られている [2, 3, 4].

微分方程式の解の挙動を計算機で解析するために, 方程式の離散化を行う必要がある. また, 離散化で得られた方程式を以下の極限公式 ( $A, B \in \mathbb{R}$ ):

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log \left( \exp \frac{A}{\varepsilon} \exp \frac{B}{\varepsilon} \right) = A + B$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log \left( \exp \frac{A}{\varepsilon} + \exp \frac{B}{\varepsilon} \right) = \max [A, B]$$

により, 超離散化することが出来る. この超離散化という操作によって, 従属変数の値までもが離散化され, セルオートマトンが得られる. セルオートマトンは, 従属変数の値が離散化されているので丸め誤差を考える必要がなく, 数値計算に適している. 超離散化によって得られるセルオートマトンとして代表的なものには, 箱玉系 [5, 6] と呼ばれる離散力学系が挙げられる. 一方で, 筆者らは微分方程式の解の構造を保存した離散化及び超離散化に興味がある. このような離散化及び超離散化は, ソリトン方程式に代表される可積分系の方程式に対して様々なものが報告されている. そのうちの一つとして, modified Lotka–Volterra 方程式 (mLV) が挙げられる. (\*) は,  $V(h) := \tanh(h - c) + \tanh c$ ,  $c > 0$  の場合, (mLV) との関連が指摘されており [7], 本稿では (mLV) の離散化及び超離散化の手法に倣って [6, 8], この場合の (\*) に対して, 変数変換:  $g_n := \tanh(h_n - c)$  を行った方程式:

$$\frac{dg_n}{dT} = (1 - g_n^2)(g_{n+1}(T - \tau) - g_n(T - \tau)) \quad (\text{NW})$$

の離散化及び超離散化について考察する. (NW) の離散化及び超離散化は, [7] でも報告されている. しかし, [7] で提案されている方程式には時間遅れのパラメータが入っていない. これは, [7] の最終目標が (\*) と関連が指摘されている OV モデルの離散化及び超離散化であったことに起因している. [7] では, OV モデルの二階微分を直接, 二階差分に離散化してしまうのではなく, (\*) を経由することで二階差分への離散化を行っている. 方程式に時間遅れのパラメータが含まれたものが, (NW) の離散化及び超離散化として適切であると筆者らは考えている. このような背景から, 本稿では時間遅れのパラメータも含んだ (NW) の離散化及び超離散化について議論する.

## 1.1 mLV 方程式

(mLV) は以下の方程式で与えられる.

$$\frac{dr_j}{dT} = r_j(1 + ar_j)(r_{j+1} - r_{j-1}) \quad (\text{mLV})$$

ただし,  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $r_j := r_j(T)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . (mLV) に対して,  $r_j = -1/(2a) + \sqrt{-1}\xi s(\tilde{T}, X)$ ,  $X = (j -$

$T/(2a))\xi$ ,  $\tilde{T} = \xi^3 T/3$  として  $\xi \rightarrow 0$  の極限をとることにより,  $s := s(\tilde{T}, X)$  が満たす方程式:

$$\frac{\partial s}{\partial \tilde{T}} = \frac{\partial^3 s}{\partial X^3} - \frac{\partial}{\partial X}(s^3) \quad (\text{mKdV})$$

が得られる. この方程式は, modified Kortweg–de Vries 方程式と呼ばれるソリトン方程式で, そのソリトン解を保存した離散化として次の差分方程式が知られている [8].

$$v_j^{t+1} \frac{1 + \delta v_{j+1}^{t+1}}{1 + av_j^{t+1}} = v_j^t \frac{1 + \delta v_{j-1}^t}{1 + av_j^t} \quad (\text{d-mKdV})$$

ただし,  $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $\delta > 0$ . (d-mKdV) に対して,  $v_j^t = r_j(-\delta t)$ ,  $T = -\delta t$  として  $\delta \rightarrow 0$  の極限をとることで (mLV) が得られるので, (d-mKdV) は (mLV) の離散化とも見なせる.

## 1.2 (NW) と (mLV) の関係

(NW) に対して, 進行波解  $g_n = G(\phi)$  ( $\phi := T + 2\tau n$ ) を課すと, 次の方程式が得られる.

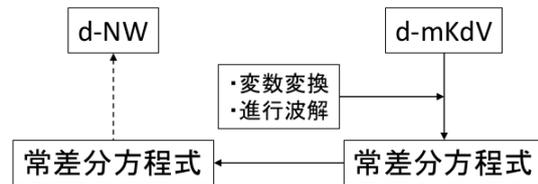
$$G'(\phi) = (1 - G(\phi)^2)(G(\phi + \tau) - G(\phi - \tau)) \quad (1)$$

一方で, (mLV) に対して, 変数変換:  $r_j = -(1 + \bar{r}_j)/2a$  及び, 進行波解  $\bar{r}_j = R(\psi)$  ( $\psi := -T/4a + \tau j$ ) を課すと,  $R(\psi)$  が  $\psi$  に関して (1) と同じ方程式を満たすことが分かる. このことから, (NW) と (mLV) は一部の解を共有していることになる.

## 2 (NW) の離散化と進行波解

### 2.1 (NW) の離散化

(\*) と (mLV) の関係から以下の模式図に示す順で, (d-mKdV) から (NW) の離散化を構成する.



まず, (d-mKdV) に対して,  $v_j^t = -(1 + \bar{v}_j^t)/(2a)$ ,  $\bar{v}_j^t = \bar{V}(\Psi)$ ,  $\Psi := t + mj$ ,  $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ ,  $\gamma = \delta/(4a)$  を課すと次の方程式が得られる.

$$\begin{aligned} & \frac{1 - 2\gamma}{\gamma} (\bar{V}(\Psi + 1) - \bar{V}(\Psi)) \\ &= (1 - \bar{V}(\Psi))(1 + \bar{V}(\Psi + 1))\bar{V}(\Psi + 1 + m) \\ & \quad - (1 - \bar{V}(\Psi + 1))(1 + \bar{V}(\Psi))\bar{V}(\Psi - m) \end{aligned}$$

ここで,  $U(\Phi)$ ,  $\Phi := t + 2mn$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  が  $\Phi$  に関して上記と同じ方程式を満たすとする. さらに,  $\Phi + 1 + m = (t - m + 1) + 2m(n + 1)$ ,  $\Phi - m = (t - m) + 2mn$  であることから,  $U(\Phi + 1) \rightarrow u_n^{t+1}$ ,  $U(\Phi) \rightarrow u_n^t$ ,  $U(\Phi + 1 + m) \rightarrow u_{n+1}^{t-m+1}$ ,  $U(\Phi - m) \rightarrow u_n^{t-m}$  という置き換えを行うと, (NW) の離散化である

$$\frac{1 - 2\gamma}{\gamma} (u_n^{t+1} - u_n^t) = (1 - u_n^t)(1 + u_{n+1}^{t+1})u_{n+1}^{t-m+1} - (1 - u_n^{t+1})(1 + u_n^t)u_n^{t-m} \quad (\text{d-NW})$$

が得られる. 実際, (d-NW) に対して,  $u_n^t = g_n(\gamma t)$ ,  $\gamma m = \tau$ ,  $\gamma t = T$  として  $\gamma \rightarrow 0$  の極限をとると (NW) が得られる.

## 2.2 (d-NW) の進行波解

(NW) と (mLV) は進行波解を共有していたので, (d-NW) の解として以下の形をしたものが求まる.

$$u_n^t = \frac{M + NL^t K^n}{1 + L^t K^n},$$

$L > 1$ ,  $LK \neq 0$ ,  $K \neq 1$ ,  $M \neq N$  を仮定して,  $M, N, L, K, m$  が満たす条件を求めると,  $\Delta := \frac{1-2\gamma}{\gamma}$  として, 以下の分散関係:

$$(2M - \Delta)(K - 1)(L - 1)(KL^2 - 1) \times [4L(L^{2m} + K) - \{2(L + 1)(LK + 1) - (LK - 1)(L - 1)\Delta\}L^m] = 0$$

が得られる. また,  $M, N, K, L, m, \Delta$  による関係式が三つ得られる. ここで,  $M = \Delta/2$  とすると前述の三つの関係式から  $N = \Delta/2 (= M)$  となってしまうことが従ってしまい, これは仮定に反している. さらに,  $K, L \neq 1$  であることから,  $K, L, m$  に対して, 以下に挙げる二通りの関係式が得られる. そして, それぞれの場合について, 以下の様な進行波解が求まる.

- $KL^2 - 1 = 0$  の場合

$$u_n^t = \frac{L^{m+1}(-L^{m+1} \pm \sqrt{D}) + (-1 \pm \sqrt{D})L^{t-2n}}{L^{m+1}(1 + L^{t-2n})}$$

ただし,  $D := L^{2m+2} + \Delta L^{m+1} + 1$ .

- $4L(L^{2m} + K) - \{2(L + 1)(LK + 1) - (LK - 1)(L - 1)\Delta\}L^m = 0$  の場合

$$u_n^t = \frac{L^m(-2L^m + LK + 1) + \{-L^m(LK + 1) + 2LK\}L^t K^n}{L^m(LK - 1)(1 + L^t K^n)},$$

$$u_n^t = \frac{L^m(2L^{m+1} - LK - 1) + \{L^m(LK + 1) - 2K\}L^t K^n}{L^m(LK - 1)(1 + L^t K^n)}.$$

ここで得られた進行波解は連続極限をとることができる.  $K, L$  が含まれた解からは, [9] で報告されてい

る (NW) の解が得られる.  $L$  のみで書かれた解からは, (NW) の自明解:  $g_n \equiv \text{const.}$  が得られることから, この解は離散系特有の進行波解となっている.

また,  $K, L$  が含まれた解たちに関して,  $K > 0$  の場合が実際の交通流に対応したものととなり, 渋滞の伝搬の様子を表す. さらに, 分散関係から  $K > 0$  となる  $L > 1$  が存在するための条件は以下で与えられる.

$$m > \frac{1 - 4\gamma}{4\gamma}$$

$m$  は, (\*) の  $\tau$  に対応するパラメータであった. この不等式は車の運転手の反応がよくないとこのモデルにおける渋滞が生じ得ることを示唆している.

## 2.3 (d-NW) の解の計算結果

ここでは,  $K, L$  が含まれた解のうち, 一つ目の解の計算結果を図示したものを図 1-4 に示す.  $u_n^t$  は, (NW) の  $g_n$  ( $:= \tanh(h_n - c)$ ) に対応する従属変数であり,  $c$  は正定数で  $h_n$  が車間距離であった. そこで, グラフの縦軸は  $u_n^t$  ではなく,  $c = 1$  とした場合の車間距離に対応する

$$h_n^t := 1 + \frac{1}{2} \log \frac{1 + u_n^t}{1 - u_n^t}$$

としている. また, パラメータは,  $L = 1.1$ ,  $\gamma = 0.25$ ,  $m = 3$ . 進行波が, 時刻  $t$  の変化とともに右から左に伝搬する様子が確認できる.

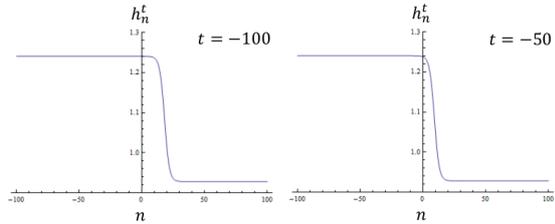


図 1:  $t = -100$

図 2:  $t = -50$

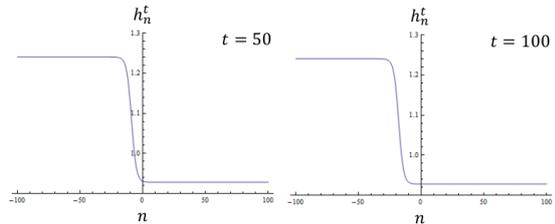


図 3:  $t = 50$

図 4:  $t = 100$

### 3 (d-NW) の超離散化と進行波解

#### 3.1 (d-NW) の超離散化

(d-NW) における車間距離に対応する  $h_n^t$  に対して, 変数変換:  $h_n^t = \exp(H_n^t/(2\varepsilon))$  を施すことで, (d-NW) に対して, 以下のような変数変換:  $u_n^t = \tanh((H_n^t - C)/(2\varepsilon))$ ,  $\tilde{u}_n^t := \exp((H_n^t - C)/\varepsilon)$  を行うと,

$$\frac{(1 - 4\gamma)\tilde{u}_{n+1}^{t-m+1} + 1}{\tilde{u}_{n+1}^{t-m+1} + 1} \tilde{u}_n^{t+1} = \frac{(1 - 4\gamma)\tilde{u}_n^{t-m} + 1}{\tilde{u}_n^{t-m} + 1} \tilde{u}_n^t$$

が得られる. ただし,  $C > 0$ . ここで,  $1 - 4\gamma > 0$  とし,  $1 - 4\gamma = \exp(-G/\varepsilon)$  とする. ただし,  $G > 0$ . 上記の方程式を超離散化すると,

$$\begin{aligned} H_n^{t+1} + \max[0, H_{n+1}^{t-m+1} - C - G] - \max[0, H_{n+1}^{t-m+1} - C] \\ = H_n^t + \max[0, H_n^{t-m} - C - G] - \max[0, H_n^{t-m} - C] \end{aligned} \quad (\text{ud-NW})$$

が得られる.

#### 3.2 (ud-NW) の進行波解

(d-NW) の解で  $K, L$  が含まれた方を超離散化する.  $K, L$  に対して, 変数変換:  $K = \exp(P/\varepsilon)$ ,  $L = \exp(Q/\varepsilon)$  を施して, 超離散化を行うと以下の様な (ud-NW) の解:

$$\begin{aligned} H_n^t &= C + P + (1 - m)Q + \max[0, Q(t - m) + Pn] \\ &\quad - \max[0, Q(t - m + 1) + P(n + 1)] \\ H_n^t &= C + mQ - P + G + \max[0, Q(t - m) + P(n + 1)] \\ &\quad - \max[0, Q(t - m) + Pn] \end{aligned}$$

が得られる. ただし,  $P, Q > 0$  また, 分散関係も超離散化され  $P, Q$  に対して次の関係式が成り立つ.

$$\min[G - Q, P - mQ] = 0$$

#### 3.3 (ud-NW) の解の計算結果

ここでは, 上記の解で一つ目の計算結果を図示したものを図 5-8 に示す. パラメータは,  $Q = 1$ ,  $G = 2$ ,  $m = 3$ ,  $C = 4$ . 離散系の場合と同様に, 進行波が, 時刻  $t$  の変化とともに右から左に伝搬する様子が確認できる.

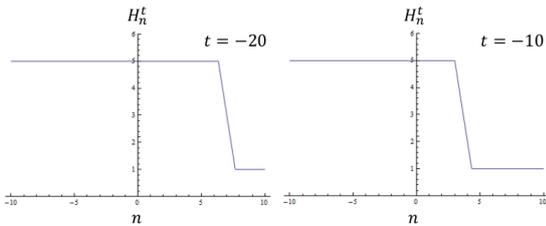


図 5:  $t = -20$

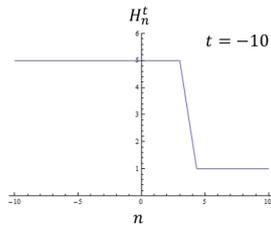


図 6:  $t = -10$

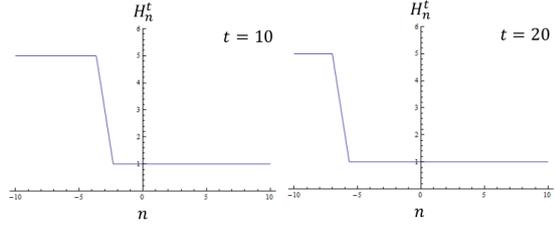


図 7:  $t = 10$

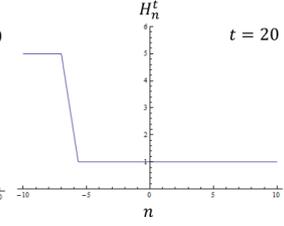


図 8:  $t = 20$

## 4 まとめと今後の課題

本稿では, (NW) の時間遅れのパラメータを含んだ離散化及び超離散化とそれぞれの進行波解について議論した. 今回得られた離散方程式 (d-NW) の解の安定性解析が今後の課題となっている. (NW) と (d-NW) それぞれの解の安定性の対応について明らかにしていきたい. また, OV モデルとその解の安定性 [10] が (d-NW) とその解に対してどのような関連があるかを解明することも今後の課題としたい.

## 参考文献

- [1] G. F. Newell, Oper. Res. **9** (1961) 209.
- [2] G. B. Whitham, Proc. R. ZSoc. Lond. A Math. Phys. Sci. **428** (1990) 49.
- [3] Y. Igarashi, et al. J. Phys. Soc. Jpn. **68** (1999) 791.
- [4] K. Hasebe, et al. Phys. Lett. A **259** (1999) 135.
- [5] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira, and J. Satsuma, Phys. Rev. Lett. **76**, 3247 (1996).
- [6] D. Takahashi and J. Matsukidaira, J. Phys. A **30** (1997) L733.
- [7] M. Kanai, et al. Phys. Rev. E **79** (2009) 056108.
- [8] S. Tsujimoto and R. Hirota, RIMS Kokyuroku **933** (1995) 105.
- [9] Y. Tutiya and M. Kanai, J. Phys. Soc. Jpn. **76** (2007) 083002.
- [10] M. Bando, et al. Phys. Rev. E **51** (1995) 1035.