

# TASEP を用いた交差点における車と歩行者の交通モデルの 解析

伊藤 秀剛<sup>1</sup>, 西成 活裕<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 東京大学 工学系研究科 航空宇宙工学専攻

<sup>2</sup> 東京大学 先端科学技術研究センター

## 概要

本論文では、左折する車と歩行者の相互作用を TASEP を用いて表すモデルを提案する。歩行者はポアソン分布に従い交差点へ侵入し、車は歩行者が交差点を渡っているときには通過することができない。このモデルは本来の TASEP と違い、境界条件が歩行者の数に依存するため、境界条件が時間と共に変化するモデルである。このモデルについて、モンテカルロシミュレーション、一部のパラメーターにおける厳密な解、拡張クラスター近似と孤立膨張波近似の二つの近似解について考察した。さらに、このモデルに信号を追加したモデルについて考察し、歩行者分離型の信号と通常の信号における流量の差について検証した。

## Analysis on a Cellular Automaton Model of Vehicles and Pedestrians at an Intersection

Hidetaka Ito<sup>1</sup>, Katsuhiro Nishinari<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Department of Aeronautics and Astronautics, School of Engineering, The University of Tokyo

<sup>2</sup> Research Center for Advanced Science and Technology, The University of Tokyo

## Abstract

We propose a new TASEP model of vehicles turning left and pedestrians in an intersection. Pedestrians entering the system follow Poisson process and vehicles at the boundary can exit the system only if there are no pedestrians in the intersection. Unlike ordinary TASEP model, the boundary condition of the model varies with time. We analyze the model in various ways: performing Monte Carlo simulation of the model, obtaining exact results of limiting cases, and investigating two approximation results. Moreover, we study the model with traffic lights and difference in flow of two types of traffic lights: pedestrian vehicle separation signals and ordinal signals.

## 1 序論

渋滞は世界中で社会問題となっている現象である。数理的に渋滞問題を解決するために、多くのモデルが考案されてきた [1]。Totally asymmetric simple exclusion process (TASEP) とはセルオートマトンを用いたモデルの一つである。これに改良を加えたモ

デルが多くの現象のモデル化に使用されている [2]。TASEP は交通流の基本モデルの一つとして関心が持たれているが、定常的でない境界条件を持つものについては理解が進んでいない [3]。

また、交差点における左折車の渋滞が深刻である。図 1 を見ると、歩行者の存在により車の移動ができない状態になっている。この現象は多くの渋滞の原



図1: 本郷三丁目の交差点の様子。歩行者により車が左折できない状態になっていることがわかる

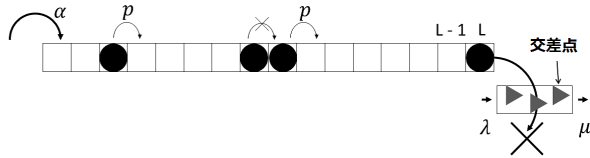


図2: 交差点のモデル

因になっているが、このような現象のモデル化による理解が進んでいない。そこで、本論文では TASEP をベースとして、交差点における車と歩行者をモデル化し、その性質を論じる。

## 2 モデルの提案

我々のモデルは、非定常的な境界条件を持つ TASEP を用いて、交差点の左折の際の車と歩行者の相互作用を表したモデルである。我々が解析したモデルが図2に示されている。このモデルでは車の流れを開放系 TASEP で表し、交差点での人の流れを離散的な待ち行列で表現する。人は、各ステップ時間ごとに交差点にパラメータ  $\lambda$  に従うポアソン分布で流入し、それぞれの人は確率  $\mu$  で系から出る。そして、交差点は車のセルの右端に繋がっており、交差点上に人がいない場合に限って、確率  $p$  で車が交差点を乗り越えて系の外へ出る。そのため、時間に依存する交差点上の人の数によって境界条件が決まり、時間に依存する境界条件を持つモデルとなる。

## 3 モデルの性質

### 3.1 シミュレーション結果

このモデルのシミュレーションによる相図が図3である。通常の TASEP と同じく、この系も相転移をおこし、三つの相が現れる。低密度相 (LD)、高密度相 (HD)、最大流量相 (MC) の三つである。しかしながら、パラメータの値におおじて相の境界線は変化し、通常の TASEP と同一にはならないことがわかる。

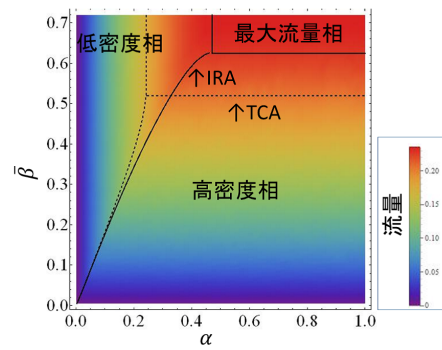


図3: シミュレーションによるモデルの相図。  $p = 0.72$  かつ  $\mu = 0.1$  に設定した。点線が TCA、実線が IRA という二つの近似の結果である。

### 3.2 歩行者モデルの解

歩行者のモデルは車のモデルとは独立であるので、個別に解を求めることができる。歩行者のモデルである、離散的な待ち行列は定常分布が求まる。 $n$  人の歩行者が交差点にいる確率が  $p_n$  であるとして、 $p_n = 1/n! (\lambda/\mu)^n e^{-\lambda/\mu}$  である [4]。よって、右側の境界があいていてさらに端の車が外に出る平均的な確率は  $\bar{\beta} = p e^{-\lambda/\mu}$  である。この  $\bar{\beta}$  は通常の TASEP の  $\beta$  に対応する。今後は、上記の式を用いて歩行者の量  $\lambda$  を  $\bar{\beta}$  で間接的に表す。 $\bar{\beta}$  が大きい時は  $\lambda$  が小さい時に対応する。歩行者の量が多くなると、相転移になる車の量の境界が低くなることわかる。

### 3.3 一部のケースの解

セル数  $N$  を無限大とした熱力学的極限の、各相の境界線について考える。 $\mu = 1$  の時は通常の TASEP と等しくなり、解が知られている。 $\mu \rightarrow 0$  の時も定常流量が求まる。この時、一度歩行者が交差点に入ると無限大に長い時間交差点にとどまり、逆に交差点に歩行者がいなくなると無限大に長い時間交差点は開放され続ける。これによって、歩行者がいる間は交差点を車は通過できず、歩行者がいらない間は完全に自由に車が流れて MC 相の流量になる。この二つの状態を遷移する時は間無視でき、高密度相の流量が  $J_{HD} \rightarrow \frac{1-\sqrt{1-p}}{2} \frac{\bar{\beta}}{p}$  と求まる [4]。この時に MC 相はなくなる。つまり、MC 相に対応している部分が、 $\bar{\beta} = p$  の線となって見えなくなる。 $\mu \rightarrow 0$  の場合の相図が図4である。一般の  $\mu$  の時は、 $\mu = 1$  と  $\mu \rightarrow 0$  の中間の流量となり、相の境界線も中間となる。この境界線の動き方は、 $\bar{\beta}$  が大きいときはあまり  $\bar{\beta} = 1$  の解からあまり動かないが、 $\bar{\beta}$  が小さくな

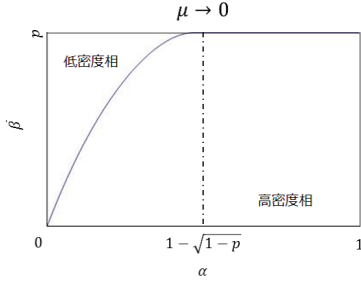


図 4:  $\mu \rightarrow 0$  の時の相図。

るにつれ、いっきに  $\bar{\beta} \rightarrow 0$  の解に近づく。変数  $\bar{\beta}$  を  $\lambda$  に戻すと、 $\mu$  に対し線形のオーダーで相転移線が動く。

### 3.4 近似手法

厳密解が求まらないとき、拡張 2 クラスター近似 (TCA)、孤立膨張波近似 (IRA) の二つの近似法により流量や相の境界線の近似解を求める。

TCA は実質的には 3 クラスター近似であり、右端の二つのセルと交差点の合計 3 つのセルを考え、それらより先の相関関係をすべて無視する。この 3 セルに車がいるかないか、歩行者がいるかないか (一人でもいれば「いる」にカウントする) の二通りずつの状態があり、全部で 8 状態である。つまり遷移行列  $T$  が  $8 \times 8$  行列で定義できる。近似の定常解を  $\Phi$  とおく。ここで、遷移行列は

$$T = \begin{pmatrix} \left(\frac{\bar{\beta}}{p}\right)^\mu T_2(\alpha_2, p) & \frac{\bar{\beta}}{p} \frac{1 - \left(\frac{\bar{\beta}}{p}\right)^\mu}{1 - \frac{\bar{\beta}}{p}} T_2(\alpha_2, 0) \\ \left(1 - \left(\frac{\bar{\beta}}{p}\right)^\mu\right) T_2(\alpha_2, p) & \left(1 - \frac{\bar{\beta}}{p} \frac{1 - \left(\frac{\bar{\beta}}{p}\right)^\mu}{1 - \frac{\bar{\beta}}{p}}\right) T_2(\alpha_2, 0) \end{pmatrix} \quad (1)$$

とあらわされる。ここで、 $T_2(\alpha_2, p)$  と  $T_2(\alpha_2, 0)$  は通常の TASEP の 2 クラスター近似をした場合の遷移行列  $T_2(\alpha, \beta)$  にたいして、 $\alpha = \alpha_2 \wedge \beta = p$  または  $\alpha = \alpha_2 \wedge \beta = 0$  を代入した場合であり、 $T_2(\alpha, \beta)$  は

$$T_2(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & (1 - \alpha)\beta & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \alpha)(1 - \beta) & \beta & 0 \\ \alpha & \alpha\beta & 1 - \beta & \beta \\ 0 & \alpha(1 - \beta) & 0 & 1 - \beta \end{pmatrix} \quad (2)$$

とあらわされる。この遷移行列をもとに方程式  $\Phi = T\Phi$  を解いて、近似の定常解  $\Phi$  を求める [4]。図 5 が  $\alpha = 1$  の時の数値計算結果と TCA 近似解の比較である。これは、系が処理できる車の流量のキャパシ

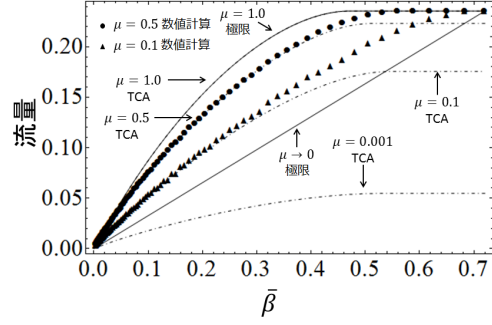


図 5:  $p = 0.72, \alpha = 1$  の数値計算結果と TCA 近似解の比較。

ティを表す。 $\alpha$  が小さい場合は、境界条件の入りは通常ルールであるため TASEP 厳密解の自由流の流量がこの系の流量の上限になる。この方法は、通常の TASEP では厳密解と等しい解を与えるが、このモデルでは厳密にはならず、 $\mu$  が大きい時に限り良い近似を見せる。近似解は、数値計算の値より小さくなる傾向があり、また  $\bar{\beta}$  が大きくなると数値計算からかい離する。

一方、IRA は交差点上の歩行者が全てなくなった際に、交差点に近いセルすべてに粒子が十分に存在していると仮定する近似である。これが、車が流れ始めると膨張波が道を進行し、その膨張波が交わらないことが名前の由来である。この近似は、 $\mu$  が小さい時に交差点が開かず車が詰まるという考えに基づく近似である。この近似では一度交差点に歩行者がいなくなってからどれだけの期間交差点が開いたままであるかを確率で考えることにより、交差点が開いてから  $n$  ステップ目までの流量合計の平均を  $J_n$  として、流量は

$$J_{HD} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\bar{\beta}}{p}\right)^{1+n\mu-\mu} \left(1 - \left(\frac{\bar{\beta}}{p}\right)^\mu\right)^2 J_n \quad (3)$$

のように無限和で表すことができる。ここで  $J_n$  をフィッティングで近似する。系が小さいときには解析的に解が求まることから、 $n = 1, \dots, 6$  までの解を使って  $J_n^{fit} = \frac{1-\sqrt{1-p}}{2}n + an^b$  でフィッティングすると流量が求まる [4]。図 6 が  $\alpha = 1$  の時の数値計算結果と IRA 近似解の比較である。この近似法は  $\mu$  が小さい時によい近似を見せ、 $\mu \rightarrow 0$  での極限は厳密な流量と一致する。また近似解は、数値計算の値より大きくなる傾向があり、 $\bar{\beta}$  が大きい時に数値計算の値から離れる。

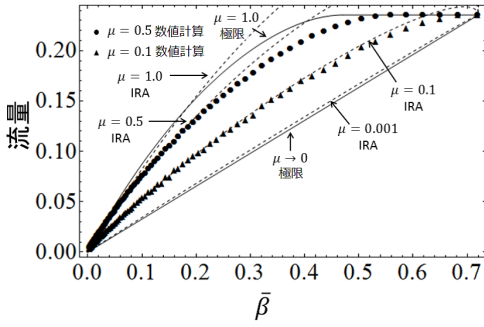


図6:  $p = 0.72, \alpha = 1$  の数値計算結果と IRA 近似解の比較。

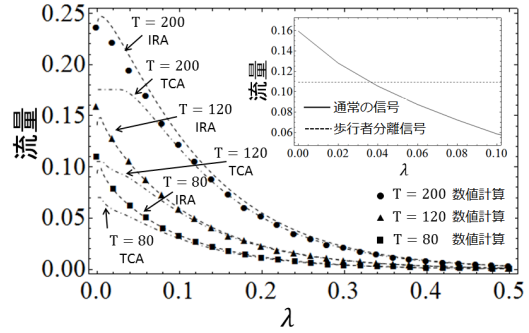


図7: 信号機ありの流量の数値計算と近似計算の結果 ( $p = 0.72, \mu = 0.1, \alpha = 1, T + T' = 200$ )

### 3.5 信号がある場合

このモデルに、信号機に値する、一定時間  $T + T'$  のうち  $T$  だけ車と歩行者が交差点を通過可能であるというルールを付け加える。 $T$  が青信号時間、 $T'$  が赤信号時間である。他のパラメータは上記のモデルと同一である。車と歩行者が同じ信号に従うとする。この時、待っている歩行者が赤信号の間増え続け、青信号になると待っていた歩行者が交差点に侵入し交差点をふさぎ、車は交差点を通過することができない。その待ち時間だけ車の通行時間のロスがある。この時間を近似的に求めるため、歩行者を青信号の時に来た歩行者、赤信号の時に来た歩行者に分離する。すると、前者は赤信号の時に系を出入りしないため考えなくてよい一方、後者がいると待ち時間が発生する。この後者の歩行者が交差点を抜けるまでが車の待ち時間に相当し、この待ち時間を除くことで実質的に車にとって信号が青信号となる時間が計算できる。ここで、歩行者が交差点を出る時間が幾何分布に従っているため、近似的な待ち時間は

$$T_{unsteady} \approx \frac{-1}{\ln(1-\mu)} \left( \ln T' \lambda + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{2kn^{2k}} \right) \quad (4)$$

である [4]。ここで、 $\gamma$  はオイラー・マスケローニ定数である。この時間だけ車は交差点を通過できるとして流量が計算できる。 $\alpha$  や  $\mu$  と流量の関係は信号無しの時と同じである。以上の近似計算の結果と数値計算結果を比較したものが図7である。 $\alpha = 1$  の場合を示しており、これは系が流すことのできる流量のキャパシティを表している。信号青時間を固定し歩行者流量を変化させた場合の比較を行っている。また、図7の挿入図は同じパラメータを用いて、通

常の信号と歩行者分離信号（歩行者のみが交差点を通過する時間を一定量確保する代わりに車の移動時は歩行者の信号を赤にする。スクランブル交差点も同じタイプの信号である。）の流量を比べた図である。これは、実際の現象に近いパラメータ設定である。非常に歩行者が少ない時 ( $\lambda < 0.03$ ) 以外、歩行者分離信号の方が流量が大きいことがわかる。

### 3.6 まとめ

本論文は、交差点を左折する車と歩行者の相互作用を、時間変化する境界条件を持つ TASEP でモデル化し、その性質について論じた。提案されたモデルは極限を取ることで厳密な解を求めることができる。また、TCA と IRA という二つの近似解を提案した。これら二つの近似は、TCA は  $\mu$  が大きいとき、IRA は  $\mu$  が小さいときに良い近似を示すことから、まったく逆の性質を持ち補完的な存在であることがわかる。最後に信号を模擬したルールを付け加えた場合について、シミュレーションと解析計算によりその性質を論じた。そして、歩行者分離信号と普通の信号の流量の比較を行った。この結果から、左折車による渋滞緩和のために歩行者分離信号が有効である。

### 参考文献

- [1] D. Helbing, Rev. Mod. Phys. **73**, 1067 (2001).
- [2] T. Chou, K. Mallick, and R. Zia, Rep. Prog. Phys. **74**, 116601 (2011).
- [3] M. Woelki, Phys. Rev. E **87**, 062818 (2013).
- [4] H. Ito, and K. Nishinari, Phys. Rev. E **89**, 042813 (2014).