

時間遅れの繰り込みによる感覚行動系の安定性

本田 泰¹

¹ 室蘭工業大学 しくみ情報系領域

概要

線形的な感覚行動系は、簡単な2階微分方程式で記述することが出来る。従って、ほとんどのゲイン領域において減衰振動が期待される。一方、そのような感覚行動系に時間遅れが含まれると、行動の振動の減衰が遅くなるばかりか、発散する場合も多いことが知られている。

本研究では、系を記述する微分方程式を遷移行列を用いた形式で記述し、微小な時間遅れをくり返し繰り込むことで、ゲイン領域における系の安定領域が縮小することを明らかにした。

Stability of a sensory-motor system with renormalized time delay

Yasushi Honda¹

¹ College of Information and Systems, Muroran Institute of Technology, Japan

Abstract

A sensory-motor system using linear functions is described by a second order differential equation. The system behaves as damped oscillation for the most value of gains. On the other hand in a sensory-motor system with a time delay, we observe that the decay time becomes longer than those for without time delay. For some values of gain, the system diverges.

In this study, we describe the differential equation by use of a transition matrix, and renormalize the time delay into the system behavior. Gain region having stable behaviors is calculated from the renormalization analysis.

1 環境と相互作用するロボット

時間遅れのある感覚行動系の具体的な例として、回転翼飛行ロボットを用いる。運動自体のもつダイナミクス、および環境との相互作用のもつ特徴的な時間スケールが、体系に含まれる時間遅れと同程度であると考えられるため、その安定性を知る上で、時間遅れの効果を見捨てることはできない。

つまり、飛行ロボットの運動安定性は、時間遅れの存在に大きく影響を受ける。運動を安定させるためのゲインの値は、時間遅れの存在によって、非常に狭い領域に限られることが実験的に知られている[1]。

本研究は、実空間における遷移行列を用いることによって、直感的に理解しやすいかたちで安定性の

議論を行い、その安定ゲイン領域の縮小を明らかにする。

2 飛行ロボットにおける感覚行動写像

いま、飛行ロボットの1軸(x-軸とする)の周りだけで回転運動を考える(図1参照)。飛行ロボットのx-軸周りの慣性モーメントを I_x 、また回転角度を φ とすると回転運動方程式は

$$I_x \ddot{\varphi} = \pi(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}, \dots) \quad (1)$$

である。ここで、 $\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}, \dots$ がセンサーで感知される感覚入力である。

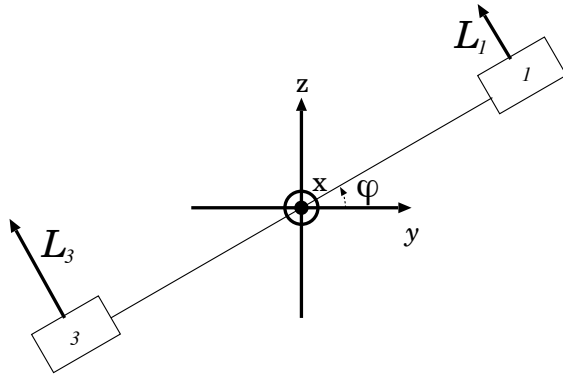


図 1: x -軸周りの飛行ロボットの回転角度 φ とローター 1,3 による揚力 L_1, L_3

3 遷移行列を用いた解析

いま、感覚行動写像 [2] π を $\varphi, \dot{\varphi}$ のみの線形関数と仮定すると

$$\ddot{\varphi} = -C_P \dot{\varphi} - C_I \varphi \quad (2)$$

と書ける。この微分方程式を行列形式で書くと

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_P & -C_I \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix} \quad (3)$$

と書ける。行列 \hat{A} を

$$\hat{A} \equiv \begin{pmatrix} -C_P & -C_I \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

と定義すれば、(3) 式は

$$\frac{d}{dt} \vec{s}(t) = \hat{A} \vec{s}(t) \quad (5)$$

ただし、状態ベクトル $\vec{s}(t)$ は

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix} \quad (6)$$

である。

\hat{A} 行列の固有値は

$$\lambda_{\pm} = -\gamma \pm \frac{\sqrt{D}}{2} \quad (7)$$

また、 $\varphi(t)$ は

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & \varphi(0)e^{-\gamma t} \left(\frac{\gamma}{\omega} \sin \omega t + \cos \omega t \right) \\ & + \frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega} e^{-\gamma t} \sin \omega t \end{aligned} \quad (8)$$

と求められる。ただし、

$$D \equiv C_P^2 - 4C_I \quad (9)$$

減衰係数 γ を

$$\gamma \equiv \frac{C_P}{2} \quad (10)$$

と定義し、角振動数 ω を

$$\omega \equiv \frac{\sqrt{|D|}}{2} \quad (11)$$

と定義した。この解は $D < 0$ の場合にたいするものである。 $D > 0$ の場合には、系は振動しないが、いずれにしても $C_P > 0$ である限り、 φ の値は 0 に減衰する。すなわち、時間遅れが無い限り系は安定する。

次に、微分方程式 (5) を遷移行列 \hat{T} を用いた漸化式で表す。(5) 式から、微小時間 Δt に対して、

$$\Delta \vec{s}(t) = \hat{A} \vec{s}(t) \Delta t \quad (12)$$

である。これを用いると、時刻 $t + \Delta t$ における状態ベクトル $\vec{s}(t + \Delta t)$ は、

$$\begin{aligned} \vec{s}(t + \Delta t) &= \vec{s}(t) + \Delta \vec{s}(t) \\ &= \vec{s}(t) + \hat{A} \vec{s}(t) \Delta t \\ &= (\hat{I} + \Delta t \hat{A}) \vec{s}(t) \end{aligned} \quad (13)$$

である。ここで、

$$\vec{s}_{i+1} = \vec{s}(t + \Delta t) \quad (14)$$

$$\vec{s}_i = \vec{s}(t) \quad (15)$$

と置き換えて書くと (13) 式は

$$\vec{s}_{i+1} = \hat{T} \vec{s}_i \quad (16)$$

と漸化式のかたちを書くことができる。ただし、ここで遷移行列 \hat{T} を

$$\hat{T} \equiv \hat{I} + \Delta t \hat{A} \quad (17)$$

と定義した。また、 \hat{I} は単位行列である。したがって、遷移行列 \hat{T} の固有値を η とすると、 \hat{A} 行列の固有値に対応する値 λ は

$$\lambda = \frac{\eta - 1}{\Delta t} \quad (18)$$

(8) と求められる。

4 時間遅れの繰り込み

実際の感覚行動系においては、データ転送時間やアンプの遅延時間など、時間遅れが無視できない。微小な時間遅れ Δt がある場合を微分方程式で表すと、

$$\frac{d}{dt}\dot{\varphi}(t) = -C_P\dot{\varphi}(t - \Delta t) - C_I\varphi(t - \Delta t) \quad (19)$$

となる。

これを行列形式で書くと

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} -C_P & -C_I \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}(t - \Delta t) \\ \varphi(t - \Delta t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

ここで、 \hat{A}_0, \hat{A}_1 を

$$\hat{A}_0 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

$$\hat{A}_1 \equiv \begin{pmatrix} -C_P & -C_I \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

と定義すれば、(20) 式は、

$$\frac{d\vec{s}(t)}{dt} = \hat{A}_0\vec{s}(t) + \hat{A}_1\vec{s}(t - \Delta t) \quad (23)$$

となる。前節と同様に、この微分方程式を漸化式の形に書き直すと

$$\begin{pmatrix} \vec{s}_{i+1} \\ \vec{s}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{I} + \hat{A}_0\Delta t & \hat{A}_1\Delta t \\ \hat{I} & \hat{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{s}_i \\ \vec{s}_{i-1} \end{pmatrix} \quad (24)$$

と状態遷移が表される。ここで、拡張状態ベクトル \vec{s}'_i を

$$\vec{s}'_i \equiv \begin{pmatrix} \vec{s}_i \\ \vec{s}_{i-1} \end{pmatrix} \quad (25)$$

また、拡張遷移行列 \hat{T}' を

$$\hat{T}' \equiv \begin{pmatrix} \hat{I} + \hat{A}_0\Delta t & \hat{A}_1\Delta t \\ \hat{I} & \hat{0} \end{pmatrix} \quad (26)$$

と定義すると、(24) 式は、

$$\vec{s}'_{i+1} = \hat{T}'\vec{s}'_i \quad (27)$$

と、時間遅れがない場合の漸化式(16)と同様の形式で記述することが可能となる。(24)式において、わざわざ2行目を付け加えたのは、微小な時間遅れのある系を、このように漸化式で表現するためである。

ここで、次のように微小パラメータ ε を用いて行列 $\hat{T}(\varepsilon)$ を導入する。

$$\hat{T}(\varepsilon) = \hat{T}_0 + \varepsilon\hat{H} \quad (28)$$

ただし、 \hat{T}_0, \hat{H} を、

$$\hat{T}_0 \equiv \begin{pmatrix} \hat{I} & \hat{A}\Delta t \\ \hat{I} & \hat{0} \end{pmatrix}, \hat{H} \equiv \begin{pmatrix} \hat{A}_0\Delta t & -\hat{A}_0\Delta t \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix} \quad (29)$$

と定義した。 $\hat{T}' = \hat{T}(1)$ である。

$\hat{T}(1)$ を解析するための出発点として本研究では、 $\hat{T}(0) = \hat{T}_0$ の場合について議論する。この場合、漸化式は

$$\vec{s}'_{i+1} = \hat{T}_0\vec{s}'_i \quad (30)$$

と書き表すことができ、 \hat{A} 行列の固有値、固有ベクトルを活用することが出来る。すなわち、 \hat{T}_0 の4つの固有値は、

$$\eta' = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + 4\lambda_{\pm}\Delta t} \right) \quad (31)$$

である。

この固有値から $\frac{\eta'-1}{\Delta t}$ の値を求めれば、それは微小な時間遅れが繰り込まれた λ' の値を意味する。この繰り込み変換を $\delta = n\Delta t$ となるまで繰り返せば、その時えられた λ' の値は、時間遅れ δ に対応する \hat{A} 行列の固有値を意味する。そのとき、 $\delta = n\Delta t$ の値を保ったまま、 $\Delta t \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ の極限をとったものが、元の時間遅れを含んだ微分方程式の解に対応する。

η' の中で

$$\eta' = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4\lambda\Delta t} \right) \quad (32)$$

が系の収束・発散を支配すると考えられる。ここでは、 λ_{\pm} のどちらの場合でも共通する議論なので、それを省略して示す。

\hat{T}_0 の特性方程式

$$\eta'(1 - \eta') + \lambda\Delta t = 0 \quad (33)$$

から、その解が Δt によって1からどのように変位するか調べよう。

η' の Δt による1階微分を $\dot{\eta}'$ で表すことにする。この特性方程式(33)の両辺を Δt で微分すると、

$$\begin{aligned} \dot{\eta}'(1 - \eta') - \eta'\dot{\eta}' + \lambda &= 0 \\ \dot{\eta}' &= \frac{\lambda}{2\eta' - 1} \end{aligned} \quad (34)$$

となる。いま、1からの変位を考えているので、 $\eta' \neq 1/2$ と仮定しても良いであろう。

ここで、(32)式をつかうと、

$$2\eta' - 1 = \sqrt{1 + 4\lambda\Delta t} \quad (35)$$

なので、

$$\dot{\eta}' = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + 4\lambda\Delta t}} \quad (36)$$

このことから、 η' は、 Δt の1次近似の範囲で、

$$\begin{aligned} \eta' &\simeq 1 + \dot{\eta}'\Delta t \\ &= 1 + \frac{\lambda}{\sqrt{1 + 4\lambda\Delta t}}\Delta t \end{aligned} \quad (37)$$

と、求められる。 \hat{A} 行列の固有値に対応する量を求めるために、これを(18)式の η の代わりに用いると、

$$\frac{\eta' - 1}{\Delta t} \simeq \frac{\lambda}{\sqrt{1 + 4\lambda\Delta t}} \quad (38)$$

となる。

この式の左辺を、わずかな時間遅れ Δt が繰り込まれた \hat{A} 行列の固有値に対応する量 $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$ であると解釈する。すなわち、

$$\lambda + \Delta\lambda = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + 4\lambda\Delta t}} \quad (39)$$

という λ' の時間発展方程式とみなせる。繰り込まれた時間遅れを τ で表すことにする。これを $\delta = n\Delta t$ となるまで n 回くり返し用いて得られた λ' は、時間遅れ δ に対応する \hat{A} 行列の固有値であると考えられる。

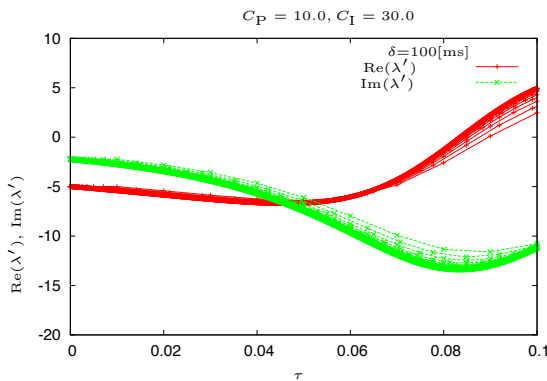


図2: λ' の時間遅れによる変化。 $\text{Re}(\lambda') > 0$ となる場合の例

図2に様々な Δt の値に対する、この手続きによって求められた λ' について示した。 Δt の値を徐々に

小さくしていくと、変化の様子は一定の振る舞いに落ち着くので、 λ' の Δt 依存性は、収束していると考えられる。

$\tau = 0$ における値が時間遅れが無い場合の λ である。実部、虚部ともに負の値なので、減衰振動をする。いっぽう、 $\tau = \delta$ まで修正された $\text{Re}(\lambda')$ の値は正である。すなわち、時間遅れの効果によって、減衰振動が発散振動に変化したことを意味する。

さまざまな C_P, C_I の値に対して同様の計算を行い、 $\text{Re}(\lambda') < 0$ となる領域を図3に示した。時間遅

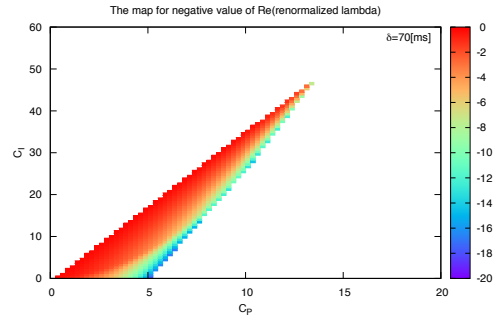


図3: 修正された λ' の実部が負になる領域地図 $\delta = 70[\text{ms}]$

れがない場合には、ゲイン領域のあらゆる値に対して感覚行動系の振る舞いは収束したが、時間遅れが存在することによって、運動が収束するのは非常に限られたゲイン領域であることが分かる。

5 まとめ

時間遅れがある感覚行動系を遷移行列を用いて記述し、微小時間遅れを連続的に繰り込むことによって、その固有値の実部が正になる領域が広がり、系が安定するゲイン領域が縮小することを示した。

得られた安定領域は、実験結果よりも狭い[1]。これは $\varepsilon = 0$ としたことに大きく依存すると考えられる。近似精度を上げて実験結果により近いゲイン領域を求めることが今後の課題である。

参考文献

- [1] 橋本理寛, 本田泰, 第18回交通流のシミュレーションシンポジウム予稿集, 33 (2012).
- [2] 「岩波講座ロボット学4 ロボットインテリジェンス」浅田 稔, 國吉 康夫 著, 岩波書店