

# 粒子排他過程による生産ラインのモデリング

江崎貴裕<sup>1</sup>, 西成活裕<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 東京大学 工学系研究科 航空宇宙工学専攻

<sup>2</sup> 東京大学 先端科学技術研究センター

## 概要

航空機などの多点の部品を組み合わせて最終製品を生産するプロセスを単純なツリー上の粒子の輸送過程としてモデル化した。各々のノードでは入ってくる部品を一つの部品に統合し、次のノードに送る。ノードはそれぞれの部品に対応するバッファを持ち、同時に最大2つまで同じ種類の部品を収容できる。必要な部品が足りない時や、次のノードのバッファが埋まっているときは部品の組み立ては行われない。このモデルにより、部品の供給や最終製品に対する需要における揺らぎが生産の流れにどのような影響を与えるかを調べた。

## Modeling of production lines as an exclusion process

Takahiro Ezaki<sup>1</sup>, Katsuhiro Nishinari<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Department of Aeronautics and Astronautics, Graduate School of Engineering, The University of Tokyo, and Japan Society for the Promotion of Science

<sup>2</sup>Research Center for Advanced Science and Technology, The University of Tokyo

## Abstract

We propose a simple process that models production flow in factories. The main focus is on assembling of parts, which makes the problem severely complicated. The overall process is represented by a directed tree, whose nodes correspond to integration of incoming parts. A node can contain no more than two particles each, and it can integrate the parts if and only if all the required parts are present and the buffer of the next node is not full. At boundaries of the tree, supply and demand of parts are fluctuated. We investigate the response of the system to the fluctuations.

## 1 はじめに

複数の工程からなる製造システムの制御は依然難しい問題で、特に、非定常的な流れの振る舞いは複雑である。本研究では、生産工程を粒子系の離散ネットワークとして表現し、その動力学的な性質を明らかにすることを目的としている。モデリングにあたっては生産工程の揺らぎや、需要予測、バッファの設定など様々な問題が考えられるが、まずは部品の組立て（だけ）が生産の流れにどのような影響を及ぼすかに着目し、系の基本的な振る舞いを明

らかにしたい。

関連する研究では、サプライチェーンを常微分方程式で記述することで表現したものがあり、在庫に関する bullwhip 効果 [1,2]<sup>1</sup>が交通流の不安定性と対応することが指摘されている [3–6]。これらは我々の研究とは扱う対象のスケールやそもそもの生産の制御則の点で異なっている。我々の関心は、よりミクロな視点から工場の中での部品の流れを理解することである。これを実現するため、部品は離散的な粒

<sup>1</sup>需要を予測しながら発注する形態の流通経路で見られる現象で、需要の変動が拡大してサプライチェーンをさかのぼって行く現象。

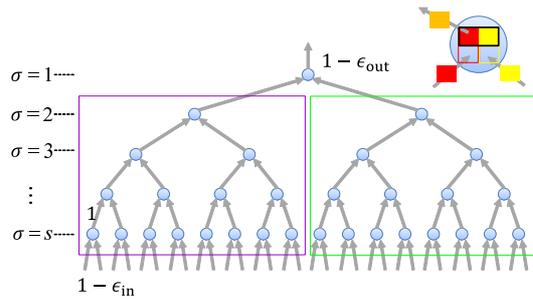


図1: 組み立てネットワークの例 ( $k = 2, s = 5$ )。

子として表現する<sup>2</sup>。この排除体積効果をもつ粒子のシステムは、これまで盛んに研究がおこなわれて来た ASEP (非対称単純排他過程) を含む相互作用粒子系 [7, 8] の一つに位置づけられる。しかし後に述べるように粒子の組み立て (合体) が及ぼす効果が流れに相関を生み、現象的・数理的に系の振る舞いを複雑にする。

## 2 モデル

図1のような有向木を考える (本論文ではそれぞれのノードの出次数1、入り次数  $k$ 、段数  $s$  の規則的なネットワークを考える)。リンクは粒子の流れに対応する。それぞれのノードは入ってくるリンクに対応する ( $k$  種類の) 粒子をそれぞれ同時に最大2個まで持つことができる。1時間ステップあたり、それぞれのノードでは粒子を一つに合体させ、次のノードへ送る (生産状態)。ただし、必要な部品が不足している場合や (欠品状態) 次のノードのバッファが2つとも埋まっている場合 (供給過剰状態) は生産を行うことができない。最下段では原料となる粒子がそれぞれ確率  $1 - \epsilon_{in}$  で供給され、最上段では最終製品ができていて、確率  $1 - \epsilon_{out}$  で出ていく。以上のプロセスはすべてのノードで平行にアップデートされる。

## 3 系の振る舞い

$\epsilon_{in} = \epsilon_{out} = 0$  の時、すなわち、毎ステップ部品が供給され最終製品が出ていく時、系は各ノードの部品がそれぞれ一つずつ格納された状態で定常的な生産を行うことができる。基本的な系の振る舞いを見るため、この状態である部品の供給を1ステップだけ止めたときに部品の不足状態がどのように伝わる

<sup>2</sup>ただしこれらのアプローチから得られる結果には当然本質的に似た点もあると考えられる。

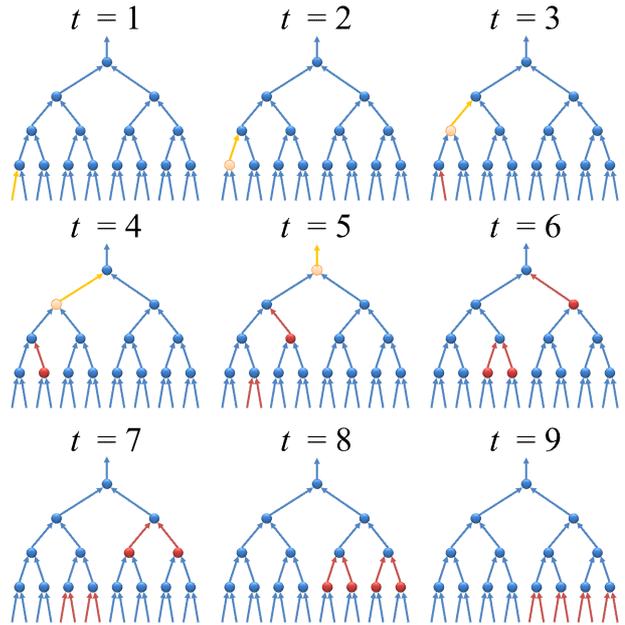


図2: 部品不足状態 (黄色いノードおよびリンク)・供給過剰状態 (赤いノードおよびリンク) の伝播。 $t = 1$  で左端の部品の供給を絶ち、部品不足状態を作った。青いノードは生産状態。

かを調べる。図2に示したように部品不足の状態はステップを追うごとに下流工程 (上のノード) に伝播していく。欠品状態のノードはそのステップでは生産ができないが、そのノードで不足していない部品は普段通り供給されるので、次のステップでバッファが埋まり、その上流工程が供給過剰状態になる。この部品の「渋滞」は上流に伝播していく。

$\epsilon_{in}$  を上げていくと、供給過剰状態の伝播していく上流に別の欠品状態が生じることがある。この時、欠品状態は (1ステップ生産を行わないという) 時間的なバッファになり、それより上流に供給過剰状態が伝播するのを防ぐ。すなわち、この二つの状態の伝播が衝突すると打消し合う。また、同じ時間ステップで最下層に生じた欠品状態が同じノードで合流すると一つの欠品状態として下流に伝播する。すなわち、欠品状態と、欠品状態あるいは供給過剰状態が衝突すると数が減る、とまとめることができる。

まず、最も重要な量の一つである生産流量  $q$  について調べる。これは単位時間当たりのアウトプットの数で定義される量である<sup>3</sup>。図3(a) に供給失敗確

<sup>3</sup>尚、一つの最終製品を作る際にすべての部品が必ず一つ消費されるので、すべてのリンクを通る粒子の平均的な流れはこの生産流量に一致する。

率  $\epsilon_{in}$  と生産流量  $q$  の関係を示す (以下のシミュレーション結果はすべて  $k = 2, s = 8$  とした場合のものである)。興味深いのは  $\epsilon_{out} = 0$  のときの流量が  $\epsilon_{in} = 0$  の付近で急激に減少し、その後なだらかに減っていくような振る舞いをみせることである。これは次のようにして理解することができる。まず  $\epsilon_{in}$  が十分に小さいとき、最下層のノードで生成された欠品状態 (1 時間ステップあたり平均して  $k^s \epsilon_{in}$  個) は生産流量を下げるが、その効果が伝播している間に他の場所で別の欠品状態が生じる確率は無視できる。したがって生じた欠品状態はほぼすべて流量低下につながり、結果として  $q \simeq 1 - k^s \epsilon_{in}$  に漸近する<sup>4</sup>。一方で  $\epsilon_{in}$  が大きくなってくると、一つの欠品状態 (とそれによって生じる供給過剰状態) が伝播している間に他の場所で欠品状態が生まれ、お互いを打ち消しあう。従ってよりなだらかに流量を減少させることになるのである。

$\epsilon_{out}$  を大きくしていくと、供給側ではなく出口の方が流れのボトルネックとなり、図 3(a) で見ると  $q$  が  $\epsilon_{in}$  の変化に依存しない領域が現れる。図 3(b) に示すように、供給律速相 (SP)、需要律速相 (DP) の二つの相が見て取れる<sup>5</sup>。これは例えば次元 ASEP における事情と同じである。ASEP での最大流量相に対応する部分がないのはバッファのサイズが 2 であるためバルクでの律速がないからである。ただし本モデルでは ASEP と異なりバルクの状態が非常に複雑になるためバルクでの (例えばバルク中のホップ確率を下げたりバッファサイズを小さくするなどすると現れる) 律速ダイナミクスについては今後の課題である。

供給律速相では、生産ネットワークの中である一つの部品の (相対的な) 不足に起因する、空間的に連続した欠品状態 (最下層の 1 ノードから最上層のノードまでの一本のパスが出来る) が起こり、これが流れを支配する (以後、欠品パスと呼ぶ)。つまり、この欠品パスはシステムにとって一時的なボトルネックとなるのである。一度出来た欠品パスはしばらくすると別の場所に移動するため、システムを制御する観点からは、解消すべきボトルネックとなる点が一定でないという意味で厄介な振る舞いであるといえる。このパスが生じている割合  $P_{sp}$  を図

<sup>4</sup> ここでは一般に大きいネットワークを考えているので、 $k^s$  は大きな数である。

<sup>5</sup> 一般にこれらの相の境界を求めることは難しい。それは  $\epsilon_{in}$  の関数として供給律速時の流量を求めることが極めて難しいことに起因する。

3(c) に示す<sup>6</sup>。 $\epsilon_{in} = 0.5$  付近から急激に大きくなるが、システムが需要律速状態にあるときには供給律速状態に入るまで立ち上がりが遅れる。

欠品パスが生じているとき、そのパスに部品を供給するサイトは生産を停止しなければいけないため、供給過剰状態がどんどん生成される。これが全体の在庫レベルに大きな変動を与える。図 4 にシステムの右半分と左半分に存在する在庫レベルの時系列変化を示す。この図の三つの場合では、それぞれ流量が異なるが、平均的な在庫レベルはほぼ同じである。つまりこのようにして生じた在庫レベルの非同期化によって (在庫を持つコストは変わらないにもかかわらず) 流量が減少して効率が悪くなっているということがわかる。

## 4 まとめ

組み立て型産業の生産ラインの極めて基礎的なモデルを提案し、その振る舞いについて調べた。単純なシステムではあるが、いくつかの興味深い現象を見ることができた<sup>7</sup>。本研究で設定したネットワークでは、サイズを変えてもこれらの現象は定性的には同じ性質を持っているようである。特に  $s$  を大きくした場合は、 $\epsilon_{in}$  が小さいところでの流量の低下が大きくなり、欠品パスが同じところにとどまりやすくなるということが観察の結果わかっている。今後の課題としてはこのモデルに対する数理的な解析<sup>8</sup>やモデル自体の拡張により、より現実にもみられる現象に対する知見を深めることが挙げられる。例えばバッファのサイズを変化させたり、ネットワークの形状を変化させる、ノード間の輸送にも揺らぎの効果を入れる等である。また、本論文で述べた在庫レベルの非同期化・非均一化は、これらの生産プロセスがつながりあったサプライチェーンとしてみたときの在庫量の (bullwhip 効果などの) 不安定性を増したり、あるいはその逆もありうるかもしれない。加えて、生産流量を増やすためにバッファを増やす場合は最下段のノードから優先的に増やした方が効率的だということも観察によりわかっており、これらについても今後詳細に調べていきたい。

<sup>6</sup> 欠品パス上のすべてのノードが欠品状態になっている場合のみをカウントしており、そのパス上で (最も遅れている) 生産がおこなわれている時間はカウントされていない。

<sup>7</sup> これらの振る舞いが実際の生産プロセスに見られる現象をどこまで表現できているかは当然調べていかなければならない。

<sup>8</sup> 一般に解くことは難しいが適当な極限をとることである程度可能であると期待している。

## 参考文献

- [1] E. Mosekilde and E. R. Larsen, Syst. Dyn. Rev. **4**, 131 (1988).
- [2] H. L. Lee, V. Padmanabhan and S. Whang, Management Sci. **43**(4), 546-558 (1997).
- [3] D. Helbing, New J. Phys. **5**:90.1-90.28 (2003).
- [4] T. Nagatani and D. Helbing, Physica A **335**:644-660 (2004).
- [5] D. Helbing, S. Lämmer, T. Sneidel, P. Šeba and T. Płatkowski, Phys. Rev. E **70**:066116 (2004).
- [6] D. Helbing, S. Lämmer, U. Witt and T. Brenner, Phys. Rev. E **70**:056118 (2004).
- [7] T. M. Liggett, *Interacting Particle Systems* (New York: Springer, 1985).
- [8] B. Derrida, Phys. Rep. **301**, 65-83 (1998).

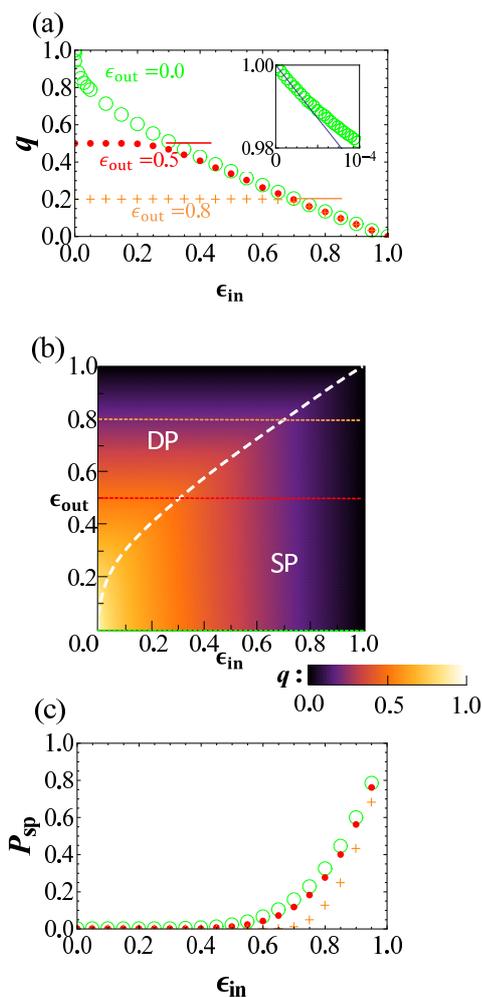


図3: (a) 生産流量と供給失敗確率の関係。需要律速状態での流量は  $q = 1 - \epsilon_{out}$  とあらわされ、水平な太線であらわした。インセットの図は  $q \approx 1 - k^2 \epsilon_{in}$  に漸近する様子。(b) 相図 (境界線はシミュレーション結果から概形を示したもので理論的に求めたものではない)。(c) 欠品パスが生じている時間的割合。マーカーごとの条件は (a) と対応している。

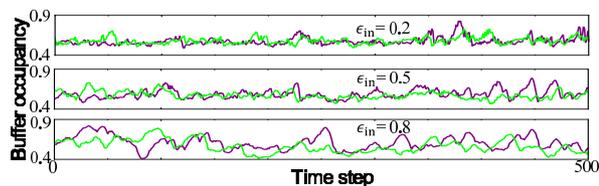


図4: 系の在庫レベルの左右比較 ( $\epsilon_{out} = 0$ )。線の色は図1に対応。