

OV 模型の N 体問題と厳密解 (2)

石田つむぎ, 益岡克年, 杉山雄規

名古屋大学 情報科学研究科 複雑系科学専攻

概要

非対称な相互作用を持つ散逸粒子の運動を記述する Optimal Velocity 模型 (OV 模型) は、速度が前方粒子間距離の関数である最適速度に緩和するように各粒子の加速度を決める。1 次元模型では、非平衡定常状態として、連なった粒子列の移動するクラスタが見られる。今回は、このクラスタ解における粒子数 N の依存性を調べる。特に、最適速度関数として階段関数を用いて、 $N = 3, 4, 5, \dots$ の場合の厳密解とその振舞いを調べる。

N-body problem and exact solutions of the OV model (2)

Tsumugi Ishida, Katsutoshi Masuoka, Yūki Sugiyama

Department of Complex Systems Science, Graduate School of Information Science, Nagoya University

Abstract

The optimal velocity (OV) model, which describes the dynamics of dissipative particles with asymmetric interaction, controls the acceleration of each particle to adjust its velocity to the optimal velocity according to the headway. In one-dimensional model, a traveling cluster can be observed as a non-equilibrium steady state. This is characterized as a limit cycle in the phase space of headway and velocity. We adopt the Heaviside function as the OV function, and obtain exact solutions of traveling clusters. We investigate the properties of the dependence of the number of particles $N = 3, 4, 5, \dots$ in such solutions.

1 研究の背景および目的

非対称な相互作用を持つ散逸粒子は、多粒子の場合、相転移現象が現れ、全体として非自明な緩和状態に達する。例えば 1 次元 OV 模型の場合、非平衡定常状態として、連なった粒子列の移動する巨視的クラスタが形成され、その振舞いは相空間におけるリミットサイクルで規定される。クラスタは、粒子数 N が少数の場合でも形成され、数 10 程度以上で N が十分大きい場合と同じ振る舞いをし、しかも粒子数密度に依存しない。

なぜ、このような振る舞いをするか? そのしくみを調べるのが目的である。なぜなら、 N が大きい場合に、その殆どの大きな自由度が解の縮退度に移行すると考えられ、その縮退性が、初期条件や境界条

件に依存しない巨視的現象の普遍性や、現われる形態の大きさや形の変形に対する自由度をもたらしっているとわれ、そのしくみを理解することになるからである。この問題に対する理解は、本稿で用いる OV 模型に限らず、非平衡散逸多体系による形態形成の一般的な特徴を捉えることにつながるであろう。

2 OV 模型

粒子集団が 1 次元空間を一様に運動しているとす。各粒子の運動が前方粒子間距離から決まる最適速度に緩和するように与えられる、以下の OV 模型を考える：

$$\frac{d^2 x_n}{dt^2} = a \left\{ V(\Delta x_n) - \frac{dx_n}{dt} \right\}. \quad (1)$$

x_n は n 番目の粒子の位置、 $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ は前方間隔、 $a (> 0)$ は感応度 (sensitivity) と呼ばれる定数で、速度差に対してどれだけ鋭敏に反応するかを与える。 $V(\Delta x)$ は最適速度関数 (OV 関数) と呼ばれ、粒子間距離 Δx によって決定される最適速度を与える。OV 関数には Δx の単調増加関数を用いる。

OV 模型は、前方の粒子との間隔が大きくなれば加速し、小さくなると減速する運動を示す。臨界密度以上で巨視的クラスタの発生を見ることができ、交通渋滞の現象などに広く適用される。

OV 模型は自明な一様流解を持ち、この解が不安定な場合、緩和してクラスタ解が現われる。線形安定性解析や数値計算の結果から、 $N = 3$ 以上の場合、クラスタ解が実現することがわかる。

3 階段関数 OV 模型の厳密解

3.1 解法

OV 関数に階段関数 ($\Delta x < d$ の場合; $V(\Delta x) = 0$ 、 $\Delta x \geq d$ の場合; $V(\Delta x) = v_{max}$) を用いると、それぞれの場合、OV 模型は線型方程式になるので、解が求められる。この二つの解の接続条件を求めることにより、クラスタ解を得ることができる。

$N = 3$ の場合のクラスタ解の時間変化は、数値計算によると図 1 のようになる。

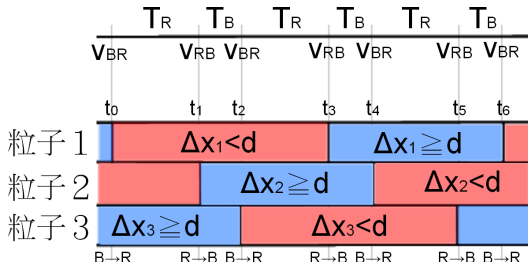


図 1: クラスタ解の概要 ($N = 3, L/N < d$)

3つの粒子の ($\Delta x < d, \Delta x \geq d$) の状況により、2つの特徴的時間 T_R (2つの粒子が $\Delta x < d$, 1つの粒子が $\Delta x \geq d$) と T_B (1つの粒子が $\Delta x < d$, 2つの粒子が $\Delta x \geq d$)、1つの粒子が $\Delta x < d$ から $\Delta x \geq d$ に移り変わるときの速度 v_{RB} 、逆の場合の速度 v_{BR} 、及びクラスタの後退速度 v_c を未知数とすると、クラスタ解を求めるための接続条件は以下の5つの方程式である。ここで、粒子の番号がずれて相対的な粒子の位置が一致するまでの時間 τ は $\tau := T_R + T_B$ で、全粒子の配置が相対的に同じ配置に戻る周期 T

は $T = 3\tau$ である。また、1つの粒子が $\Delta x < d$ である時間は $2T_R + T_B = \tau + T_R$ 、 $\Delta x \geq d$ である時間は $T_R + 2T_B = \tau + T_B$ と書ける。

- ① $d = \Delta x_{B \rightarrow R}$:

$$d = \frac{v_{BR}}{a}(1 - e^{-a\tau}) + v_c\tau$$
- ② $d = \Delta x_{R \rightarrow B}$:

$$d = v_{max}\tau - \frac{v_{max} - v_{RB}}{a}(1 - e^{-a\tau}) + v_c\tau$$
- ③ $L = x(T) - x(0) + 3v_c\tau$:

$$L = v_{max}(\tau + T_B) + 3v_c\tau$$
- ④ $v_{BR} \rightarrow v_{RB}$ の接続条件:

$$v_{RB} = v_{BR}e^{-a(\tau+T_R)}$$
- ⑤ $v_{BR} \rightarrow v_{RB}$ の接続条件:

$$v_{BR} = v_{max} - (v_{max} - v_{RB})e^{-a(\tau+T_B)}$$

3.2 $L/N = d$ の場合

特に $L/N = d$ の場合は、数値計算より $N = 3$ で、 $T_R = T_B = \tau/2$ が得られ¹、非線形なクラスタ解の厳密解が求められている [1]。その結果から一般の N について厳密解が推測でき、 $N = 4, 5$ の場合にも成り立つことを確かめた。

$$v_{RB} = \frac{v_{max}}{e^{\frac{N}{2}a\tau} + 1} \quad (2)$$

$$v_{BR} = \frac{v_{max}}{e^{-\frac{N}{2}a\tau} + 1} \quad (3)$$

$$v_c = \frac{d - \frac{1}{2}v_{max}\tau}{\tau} \quad (4)$$

$$a\tau(1 + e^{-\frac{N}{2}a\tau}) = 2(1 - e^{-a\tau}) \quad (5)$$

これによりリミットサイクルも解析的に得られる。 $L/N = d$ の場合、リミットサイクルは“self-dual” (変曲点 $(d, \frac{v_{max}}{2})$ について点対称) になっている。

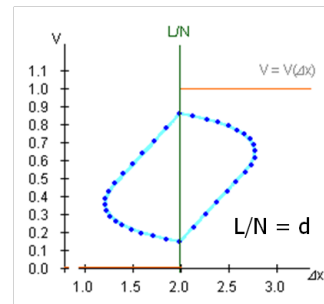


図 2: 階段関数 OV 模型のリミットサイクル ($N = 3, L/N = d$)

¹このことより、 $\Delta x < d$ である時間と $\Delta x \geq d$ である時間が等しくなり、図 2 のリミットサイクルが点対称であることと整合している。

3.3 $L/N = d - \epsilon$ の場合

$L/N \neq d$ の場合は、図3と図4で示される数値計算によって得られたリミットサイクルから推測できるように、 $L/N = d \pm \epsilon$ で“ dual ”(変曲点 $(d, \frac{v_{max}}{2})$ について互いに点対称) になっている。 $N = 3$ の場合、 $L/N = d$ (self-dual) では $T_R = T_B = \tau/2$ である。self-dual からのずれを $T_R = (\tau + t)/2$ と $T_B = (\tau - t)/2$ と定義すると、 $N = 3$ の $L/N = d - \epsilon$ の場合のクラスタ解が次のように得られる。 t と ϵ の関係は後に付ける。

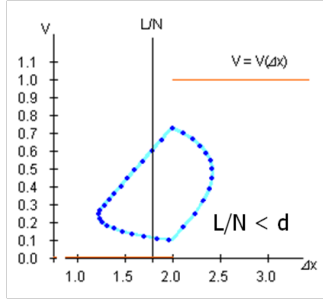


図3: $N = 3, L/N < d$

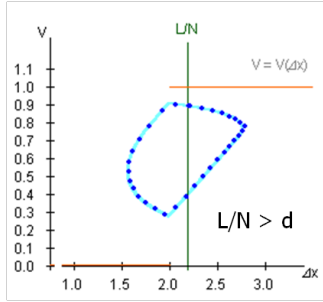


図4: $N = 3, L/N > d$

$$v_{RB} = \frac{v_{max}(1 - e^{\frac{3}{2}a\tau - \frac{at}{2}})}{(1 + e^{\frac{3}{2}a\tau})(1 - e^{\frac{3}{2}a\tau})} \quad (6)$$

$$v_{BR} = \frac{v_{max}(1 - e^{-\frac{3}{2}a\tau + \frac{at}{2}})}{(1 + e^{-\frac{3}{2}a\tau})(1 - e^{-\frac{3}{2}a\tau})} \quad (7)$$

$$v_c = \frac{d - \frac{1}{2}v_{max}\tau}{\tau} + f(t) \quad (8)$$

$$\frac{a\tau(1 + e^{-\frac{3}{2}a\tau})(1 - e^{-\frac{3}{2}a\tau})}{1 - \frac{e^{-\frac{3}{2}a\tau}(e^{-\frac{at}{2}} + e^{\frac{at}{2}})}{2}} = 2(1 - e^{-a\tau}) \quad (9)$$

ここで、 $f(t) := \frac{v_{max}}{2a\tau} \frac{e^{\frac{at}{2}} - e^{-\frac{at}{2}}}{e^{\frac{3}{2}a\tau} - e^{-\frac{3}{2}a\tau}} (1 - e^{-a\tau})$ である。また、③より、密度のずれ ϵ を t で表す式が得

られる。

$$3\epsilon = \frac{v_{max}t}{2} - \frac{3f(t)}{\tau} \quad (10)$$

$t \rightarrow 0$ で (6)、(7)、(8)、(9) はそれぞれ (2)、(3)、(4)、(5) の $N = 3$ の self-dual 場合に一致する。

3.4 $L/N = d + \epsilon$ の場合

$L/N = d + \epsilon$ の場合、クラスタ解の時間変化は図5のようになる。未知数を $\tilde{T}_R, \tilde{T}_B, \tilde{v}_{RB}, \tilde{v}_{BR}, \tilde{v}_c$ とすると、①~⑤に対応する方程式は、それぞれの未知数を置き換えたものになる。 $\Delta x < d$ の時間は $2\tilde{T}_R + \tilde{T}_B = \tilde{\tau} + \tilde{T}_R$ 、 $\Delta x \geq d$ の時間は $\tilde{T}_R + 2\tilde{T}_B = \tilde{\tau} + \tilde{T}_B$ と書ける。 $N = 3$ の場合に、 $L/N = d - \epsilon$ の場合の方程式の未知数を単純に置き換えるだけで良いのは、図6に示すように、3つの粒子の ($\Delta x < d, \Delta x \geq d$) の状況が同一のパターンになっているからである。 $N = 4, 5$ の場合には $L/N < d, L/N = d, L/N > d$ でそれぞれ違ったパターンになるので単純な置き換えにはならない。

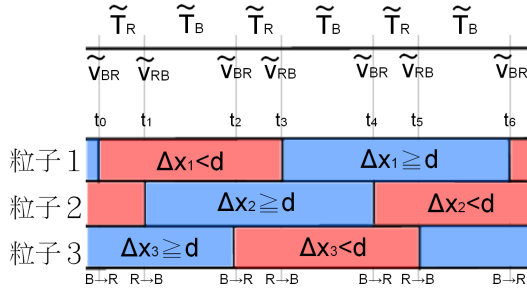


図5: クラスタ解の概要 ($N = 3, L/N > d$)

数値計算より $T_R = \tilde{T}_B, T_B = \tilde{T}_R$ がわかるので、 $\tilde{\tau} = \tau$ かつ $\tilde{t} = -t$ となる。3.3 節と同様に計算し、更に $\tilde{t} = -t$ を使うと、

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{RB} &= \frac{v_{max}(1 - e^{\frac{3}{2}a\tau - \frac{at}{2}})}{(1 + e^{\frac{3}{2}a\tau})(1 - e^{\frac{3}{2}a\tau})} \\ &= \frac{v_{max}(1 - e^{\frac{3}{2}a\tau + \frac{at}{2}})}{(1 + e^{\frac{3}{2}a\tau})(1 - e^{\frac{3}{2}a\tau})} \\ &= v_{max} - v_{RB} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{BR} &= \frac{v_{max}(1 - e^{-\frac{3}{2}a\tau + \frac{at}{2}})}{(1 + e^{-\frac{3}{2}a\tau})(1 - e^{-\frac{3}{2}a\tau})} \\ &= \frac{v_{max}(1 - e^{-\frac{3}{2}a\tau - \frac{at}{2}})}{(1 + e^{-\frac{3}{2}a\tau})(1 - e^{-\frac{3}{2}a\tau})} \\ &= v_{max} - v_{BR} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\tilde{v}_c = \frac{d - \frac{1}{2}v_{max}\tau}{\tau} - f(t) \quad (13)$$

$a\tau$ を与える方程式は (9) と同一になり、 t と ϵ の関係式は (10) と同一になる。(11) と (12) より、リミットサイクルの示す duality が示される。

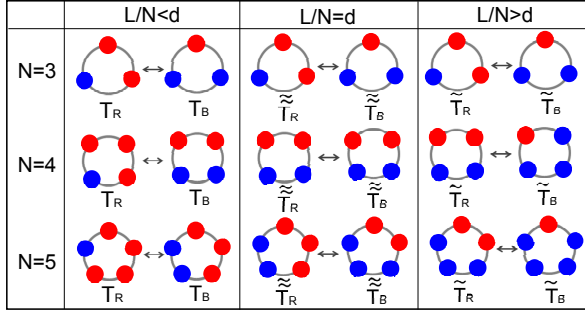


図 6: $N = 3, 4, 5$ の場合の粒子の前方間隔の状況。赤色が $\Delta x < d$ 、青色が $\Delta x \geq d$ の粒子を表している。

4 考察 ($N > 3$ の場合)

前節で $N = 3$ の場合の厳密解は求めることができた。しかし、一般の N の場合は図 6 の $N = 4, 5$ の例でみるように粒子の状況が複雑になっているため、 T_R, T_B の関係が単純でない。しかし、(6)、(7)、(8)、(9) 中の 3 を N に置き換えたものを解と推測しよう。 $N \rightarrow \infty$ で極限をとると、 t に依らずに、既に求められている以下の結果 [2]

$$v_{RB} = v_{max} \quad (14)$$

$$v_{BR} = 0 \quad (15)$$

$$v_c = \frac{d - \frac{1}{2}v_{max}\tau}{\tau} \quad (16)$$

$$a\tau = 2(1 - e^{-a\tau}) \quad (17)$$

と一致する。これは図 7 にみるように、 N が十分大きい場合に密度 L/N に依らず N が無限大の場合と同一の self-dual のリミットサイクルを与え、各粒子の振舞いが同じになることを解析的に示したことになる。

5 まとめ

散逸多粒子系での粒子数 N 依存性についての特徴を考察するため、非対称相互作用のある散逸系でクラスタ解をもつ OV 模型について、 N 体問題を研究した。数値計算で得られた定性的な性質を利用して、OV 関数が階段関数の場合の $N = 3, 4, 5 (L/N = d)$ 、 $N = 3 (L/N = d \pm \epsilon)$ でのクラスタ解の厳密解を得た。この結果から、 $L/N = d \pm \epsilon$ でのリミットサイ

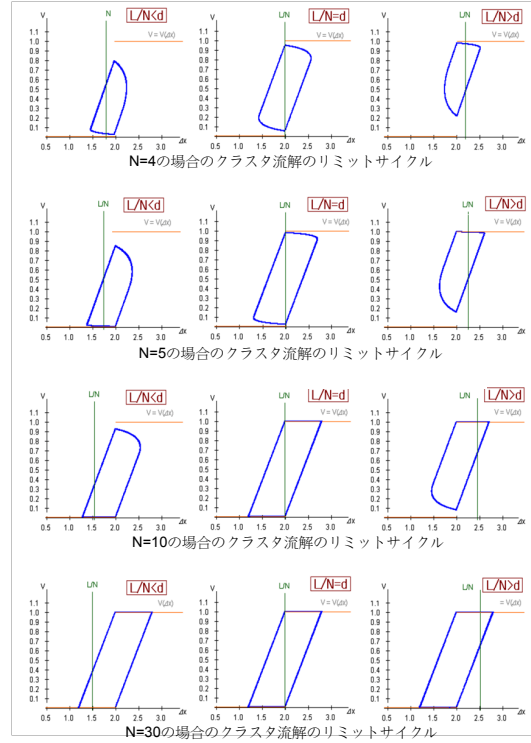


図 7: 階段関数 OV 模型のリミットサイクル ($N = 4, 5, 10, 30$)

クルやクラスタ後退速度 v_c が持つ duality を示すことができた。これは、 N が少数でも N が無限大の場合と定量的に同じ振舞いを示し、同一のリミットサイクルや相図を与える、OV 模型のような非平衡散逸系の特徴を捉えることにつながる。本稿で議論した性質は、OV 模型のような非対称相互作用する散逸多体系の特徴であるが、これが一般的な性質であるのかどうかは今後の課題である。

付記：この論文の投稿後、self-dual($L/N = d$) の場合も dual($L/N = d \pm \epsilon$) の場合も一般の粒子数 N について厳密解を求めることができた。結果として、4 節 考察の推測通りである。

参考文献

- [1] 益岡克年、石田貴浩、杉山雄規、OV 模型の N 体問題、第 14 回交通流シンポジウム論文集 p69
- [2] Yūki Sugiyama and Hiroyasu Yamada, "Simple and exactly solvable model for queue dynamics," Phys. Rev. E55 7749(1997)