

界面成長モデルとしての ASEP: 普遍ゆらぎとその実験検証

竹内一将

東京大学 理学系研究科 物理学専攻

概要

交通流モデルとしてもよく用いられる 1 次元非対称単純排他過程 (asymmetric simple exclusion process, ASEP) はランダムな界面成長のモデルとみなすこともでき、ゆらぎ分布が厳密に計算されるなど、近年著しく理解が深まっている。本予稿では ASEP の界面ゆらぎに関する最近の理論的進展を概観し、そこから Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) クラスと呼ばれる基本的な界面成長クラスの普遍的性質を調べられること、その普遍性の証左として、ASEP の界面ゆらぎが液晶乱流の界面成長で実験的にも現れることを説明する。

ASEP as a model for growth processes: universal fluctuations and experimental evidence

Kazumasa A. Takeuchi

Department of Physics, Graduate School of Science, The University of Tokyo

Abstract

The one-dimensional asymmetric simple exclusion process (ASEP), a prototypical model for traffic flow and other kinds of transport phenomena, can also be regarded as a model for random growth processes. Recent theoretical developments have revealed rigorous expressions for distributions and other statistical properties of interface fluctuations in the ASEP, which are expected to reflect universal features of the Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) class, the fundamental universality class for stochastic growth phenomena. This brief note summarizes recent theoretical results obtained thereby on universal interface fluctuations in the KPZ class, as well as experimental evidence for this universality, found recently in liquid-crystal turbulence.

1 はじめに

1 次元非対称単純排他過程 (asymmetric simple exclusion process, ASEP) は、排除体積効果だけで相互作用する多数個の粒子が 1 次元格子上でバイアス付ランダムウォークをするモデルである。ASEP は、その単純さと可解性、そして得られる結果の奥深さから、大自由度非平衡系の大変重要なモデルと考えられている [1, 2]。対応する現象としては、渋滞をはじめとする交通流、メッセンジャー RNA 上のタンパク質合成、ある種の電気伝導や高分子の伝達など [2]、何らかの「流れ」を単純化したモデルとみなされる

場合が多いが、次節で紹介する対応関係によって界面成長のモデルともみなせることは比較的知られていない。ASEP の界面成長は Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) クラスというランダム界面成長の基本的な普遍クラスに属する [3] ため、ASEP の解析を通して、ASEP だけでなく、KPZ クラスに属する界面成長全般で成り立つ統計法則を調べられるという強みがある。そしてまさに、2000 年、Johansson [4] によって ASEP の界面ゆらぎの漸近的な分布関数が厳密に導出されて以来¹、KPZ クラスにおける界面ゆらぎの

¹正確には、Johansson は一方向にのみホッピングする TASEP (totally ASEP) というモデルで導出した [4] (図 1 で $p = 0$ の

普遍性は大きく理解が進展し、スケール不変な非平衡現象の詳細な普遍法則を検証できる系として特別な注目を集めている。本稿では、ASEP を中心に、KPZ クラスの界面ゆらぎについて近年得られた主な理論的成果を紹介し、その実験検証も述べる。ただし、紙面等の都合上、理論も実験もほんの一端しか触れられないことを予めお詫び申し上げる。詳しくは、理論については最近のレビュー [6, 7, 8] を、実験については論文 [9] と講究録 [10] を参照されたい。

2 ASEP の界面成長

まず ASEP の定義と界面成長との対応を説明する。1次元格子を考え、各格子点 x は粒子がいるかいないかのどちらかであるとする (図 1(a))。後々の都合上、整数 n を用いて $x = n + 1/2$ とし、点 x での粒子の有無を、それぞれ $\eta_x = 1, 0$ と書くことにする。粒子は左右に一定のレート p, q で遷移するが、飛び移る先の格子点に既に粒子がいるときは遷移は起こらない。いま、 $p < q$ とすると粒子は平均的には右向きに流れていくが、排除体積効果のため、粒子密度や境界条件によって、渋滞の有無など様々な状態が実現する。以上が ASEP の定義であり、いわゆる driven lattice gas の一種として、その非平衡定常状態の性質や相図などが詳しく調べられている [1, 2]。

これを界面成長と関係づけるには、粒子のいるサイトを1次元界面の下り坂、粒子のいないサイトを登り坂と対応させれば良い (図 1(b))。すると、粒子が右向きにジャンプすることは、その位置の界面高さが斜面 2 つ分上昇することに対応し、従って1次元格子上で平均的に上向きに成長する界面が現れる。特に、時刻 0 から t までに点 x の界面高さが何回上昇したかは、この間に点 x を通過した粒子数と等しいことに注目しよう。すなわち、ASEP の界面高さは、粒子カレントの時間積分という、非平衡統計力学の基本的量によって直接表現されるのである。

このことを用いて、 $p = 0$ かつ「ステップ初期条件」

$$\eta_x(t=0) = \begin{cases} 1 & (x < 0) \\ 0 & (x > 0) \end{cases} \quad (1)$$

に対して、原点での界面高さ $h(x=0, t)$ の漸近的な分布関数を計算したのが、前節で紹介した Johansson の仕事である [4] (脚注¹も参照)。導出は、組合せ場合)。一般の ASEP については、2009 年に Tracy と Widom によって同じ分布関数が導出された [5]。

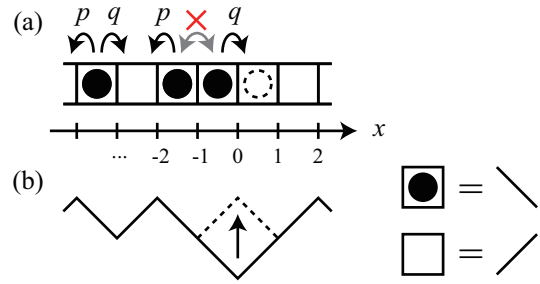


図 1: ASEP の定義 (a) と界面成長との対応 (b)。粒子が右に移動すると、その位置の界面が斜面 2 つ分上昇する (点線)。

論、または遷移確率のマスター方程式を介する高度な数学的技法を要するので、詳細は原著論文 [4] やレビュー [1, 6] 等に譲り、ここでは結果のみ書くと、後で定義する確率変数 χ_{GUE} を用いて

$$h(0, t) \simeq \frac{t}{2} - 2^{-1/3} t^{1/3} \chi_{\text{GUE}} \quad (\text{ステップ初期条件}) \quad (2)$$

となる。ただし、時刻 t は $q = 1$ となるように規格化した。ここで注目すべき点が 2 つある。まず、界面高さ $h(0, t)$ の主要項は時刻 t に比例して上昇するが、界面ゆらぎは $t^{1/3}$ に比例して成長していく。この $1/3$ 乗則は KPZ クラスの界面成長の特徴的指数 [3] であり、ASEP が KPZ クラスに属することの証左である²。次に、ゆらぎを記述する確率変数 χ_{GUE} であるが、これが実はランダム行列理論 [11] における GUE ランダム行列の最大固有値分布、別名 Tracy-Widom 分布に従うというのが Johansson [4] の主要な結果である。すなわち、 $N \times N$ の複素 Hermite 行列 A を考え、行列要素の実部と虚部を独立なガウス分布³に従う乱数だと思つと、行列 A の最大固有値 λ_{max} は、式 (2) と同じ確率変数 χ_{GUE} を用いて

$$\lambda_{\text{max}} \simeq \sqrt{2N} + \sqrt{2} N^{1/6} \chi_{\text{GUE}} \quad (3)$$

と書くことができる。ASEP とランダム行列理論は元来まったく無関係のはず⁴だが、界面高さ (あるいは

²指数に関しては、Johansson 以前にも $1/3$ 乗となることが知られていた [3]。

³非対角要素 (上三角部分) の実部と虚部は分散 $1/2$ 、対角要素 (実数) は分散 1 の独立なガウス分布に従うと考える。下三角部分は Hermite 対称性 $\bar{A}_{kj} = A_{jk}$ から決まる。このとき、行列 A の統計的重率は $e^{-\text{Tr} A^2}$ と書ける。

⁴事実、式 (2) の導出のどこにも GUE ランダム行列は現れない。 $h(0, t)$ と λ_{max} に現れる確率変数は、有限の t や N では異なる分布に従うが、極限 $t, N \rightarrow \infty$ では一致する。

は積算カレント)と最大固有値という重要な量が同じ確率分布関数で結ばれるのは驚異的な結果である。

界面ゆらぎ (2) は、ステップ初期条件 (1) に対して導出された。これは、界面の言葉でいえば、V字型の初期条件から生じる、U字型に曲がった界面の成長を解いたことになる⁵。一方、平坦な界面の成長を扱うには、初期条件を周期型 $\{\eta_x(0)\} = \{\dots, 1, 0, 1, 0, 1, \dots\}$ にすれば良い。この場合の厳密解は笹本ら [13, 14] によって得られ、

$$h(x, t) \simeq \frac{t}{2} - \frac{1}{2}t^{1/3}\chi_{\text{GOE}} \quad (\text{周期初期条件}) \quad (4)$$

となる。ここで、 χ_{GOE} は GOE ランダム行列、すなわちガウス乱数を行列要素にもつ実対称行列の最大固有値分布に対し、式 (3) と同様に定義される確率変数である。ステップ初期条件か周期初期条件か、あるいは界面が曲がっているか平坦かで、指数は同じでも異なる分布関数が現れることに注意しよう。同様の結果は多核成長 (polynuclear growth, PNG) モデル [15] や KPZ 方程式でも得られており、KPZ クラスは初期条件、または界面の形状によって異なる普遍サブクラスに分類されるという、著しい特徴をもつと考えられる [6, 7, 8, 9]。ASEP や PNG モデルでは 1 点ゆらぎのほか空間相関関数も厳密に計算されており [6, 7, 8]、それも界面曲率の有無によって異なる結果となる。このように、KPZ 普遍サブクラスは指数以外の様々な統計的性質を異にすると考えられている [9]。

3 液晶乱流による実験検証

前節で、ASEP をはじめとする可解モデルの解析により、界面ゆらぎの分布関数や相関関数が明らかにされたことを見た。これら統計量は KPZ クラスの普遍的性質だと考えられており、事実いくつかの可解モデルで同じ関数形が導出されている。その一方で、解けるモデルは少数であり、また互いに関連した数学的技法を駆使することが多く、その普遍性の程度は未知数である。そこで普遍ゆらぎの実験検証が重要となる。

ゆらぎを伴う界面成長は、多孔質中の流体流、紙の燃焼や水の浸み込み、バクテリアコロニーの成長など、多くの実験系で測定がされてきた [3] が、系の不均一性や長距離相互作用などの影響だろうか、KPZ クラスに属するものは僅かである。そこで著者

⁵Patrik Ferrari 氏のサイト [12] でシミュレーションを見ることができる。

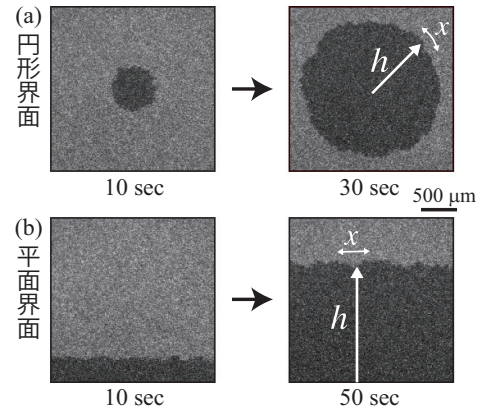


図 2: 液晶乱流の成長界面。時刻はレーザーによる核生成からの経過時間を指す。文献 [18] の Supplementary Movies で動画も見ることができる。界面高さ h はレーザー照射箇所を起点として測る。

らは、上記の問題を解決する系として、ある種のネマチック液晶に電場を印加して起こす対流現象 [16] に注目し、高電圧下で見られる液晶乱流の界面成長 (図 2) を多数回の実験によって測定した [17, 18, 9]。本実験系では、乱流成長の始点となる核を紫外パルスレーザーによって生成できるため、そのビーム形状が点か線かによって、円形界面、平面界面どちらも調べられる (図 2)。その双方で界面高さ $h(x, t)$ を定義し、ゆらぎを調べると、どちらも KPZ クラスの特徴である $t^{1/3}$ 則

$$h(x, t) \simeq v_{\infty}t + (\Gamma t)^{1/3}\chi \quad (5)$$

に従っていることが確認された [17, 18, 9]。ここで、 v_{∞} と Γ は定数パラメータ、 χ は確率変数である。

本稿で注目するのは、式 (5) に現れる確率変数 χ が従う分布である。そこで、 v_{∞}, Γ の値を実験的に決定し、それを用いてリスケールした界面高さ

$$q \equiv \frac{h - v_{\infty}t}{(\Gamma t)^{1/3}} \simeq \chi \quad (6)$$

のヒストグラムを作成したものが図 3 である。これを見ると、円形界面では $\chi \simeq \chi_{\text{GUE}}$ 、平面界面では $\chi \simeq 2^{-2/3}\chi_{\text{GOE}}$ となり、ASEP の場合の結果 (2),(4) が実験的にも精度よく確認されている。すなわち、円形界面・平面界面のゆらぎが、それぞれ GUE・GOE ランダム行列の最大固有値分布に従うという極めて非自明な結果が、ASEP やその他の可解モデルよりはるかに複雑なダイナミクスに従っているはずの液晶乱流界面においても、そのまま現れた。これは KPZ クラスの普遍性がそれだけ口バストであ

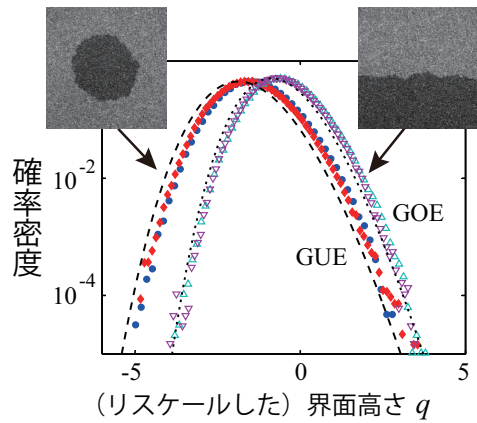


図 3: 液晶乱流の界面ゆらぎ分布。中塗り記号 (,) は $t = 10$ s, 30 s における円形界面のゆらぎを、中抜き記号 (,) は $t = 20$ s, 60 s における平面界面のゆらぎを表す。破線と点線はそれぞれ GUE、GOE の Tracy-Widom 分布を示す。ただし、GOE Tracy-Widom 分布は、ASEP 等の結果にならって、 $2^{-2/3} \chi_{\text{GOE}}$ の分布を描いている。なお、実験データの横方向の僅かなずれは有限時間効果であり、 $t^{-1/3}$ で理論曲線に漸近する [17, 18, 9]。

り、界面形状依存性やランダム行列との不思議な関係も KPZ クラス全般の普遍的性質だということの意味している。

4 むすびに

本稿で手短かに解説した KPZ クラスの界面ゆらぎは現在も新たな成果が続々と報告されており、中でも ASEP は特筆すべき役割を果たしている [6, 7, 8]。最近の主だった未解決問題を著者の偏見のもとにいくつか挙げると、普遍性の数理的・理論的な起源の解明、円形・平面界面以外の普遍サブクラスの整理⁶、時間相関や有限時刻での性質の解明などである。最近実験的にも KPZ クラスに属する系が少しずつ報告されてきた ([19]⁷など) が、依然として数理学分野の専門家たちによって研究が進められている感も否めない。本稿や講演を通して、あるいは ASEP 等のキーワードを通して、様々なバックグラウンドをもつ方々がこの話題に興味をもち、研究に参入して下されば、望外の喜びである。

参考文献

[1] 笹本智弘, 物性研究 **79**, 881 (2003).

⁶ 定常界面や様々な形状を連結したものが議論されている [8]。

⁷ 最近の論文 [19] では、コーヒーリング効果でもある条件下で KPZ 界面のゆらぎ分布が現れることが報告されている。

[2] O. Golinelli and K. Mallick, J. Phys. A **39**, 12679 (2006).

[3] A.-L. Barabási and H. E. Stanley, Fractal Concepts in Surface Growth, Cambridge Univ. Press (1995).

[4] K. Johansson, Commun. Math. Phys. **209**, 437 (2000).

[5] C. A. Tracy and H. Widom, Commun. Math. Phys. **290**, 129 (2009).

[6] T. Kriecherbauer and J. Krug, J. Phys. A **43**, 403001 (2010).

[7] T. Sasamoto and H. Spohn, J. Stat. Mech. (2010), P11013.

[8] I. Corwin, Random Matrices: Theory and Applications **1**, 1130001 (2012).

[9] K. A. Takeuchi and M. Sano, J. Stat. Phys. **147**, 853 (2012).

[10] 竹内一将, 九州大学 応用力学研究所 研究集会報告 **23AO-S7**, 68 (2012), URL: <http://hdl.handle.net/2324/23456>

[11] 永尾太郎, ランダム行列の基礎, 東京大学出版会 (2005).

[12] P. L. Ferrari, Java applet, URL: <http://www-wt.iam.uni-bonn.de/~ferrari/>

[13] T. Sasamoto, J. Phys. A **38**, L549 (2005).

[14] A. Borodin, P. L. Ferrari, M. Prähofer, and T. Sasamoto, J. Stat. Phys. **129**, 1055 (2007).

[15] M. Prähofer and H. Spohn, Phys. Rev. Lett. **84**, 4882 (2000).

[16] P. G. de Gennes and J. Prost, The Physics of Liquid Crystals, 2nd ed., Oxford Univ. Press (1995).

[17] K. A. Takeuchi and M. Sano, Phys. Rev. Lett. **104**, 230601 (2010).

[18] K. A. Takeuchi, M. Sano, T. Sasamoto, and H. Spohn, Sci. Rep. **1**, 34 (2011).

[19] P. J. Yunker *et al.*, arXiv:1209.4137 (2012).