速度のばらつきが流れに及ぼす影響について

柳澤大地 [1], 友枝明保 [2], 西成活裕 [3]

[1] 茨城大学 理学部
[2] 明治大学 研究・知財戦略機構 / JST, CREST
[3] 東京大学 先端科学技術研究センター

概要

本論文では、離散時間確率セルオートマトンモデルの物理量を単位変換する方法を利用し、モデルのマルコフ性を維持したまま、自己駆動粒子のホップ確率による移動速度の平均とばらつきを独立に変化させることができる方法を提案する。この方法を用いると、ホップ確率が流量に及ぼす影響から平均値の変化による寄与を除き、ばらつきが及ぼす影響に焦点を当てることができる。TASEP と退出モデルにこの方法を適用すると、個々の粒子の平均移動速度が同じ場合、TASEP ではばらつきが大きいと流量が減少するが、退出モデルでは逆に増加することが分かった。

Influence of Velocity Variance on Flow

Daichi Yanagisawa[1], Akiyasu Tomoeda[2], and Katsuhiro Nishinari[3]

[1] College of Science, Ibaraki University
[2] Meiji Institute for Advanced Study of Mathematical Sciences, Meiji Univeristy / JST, CREST
[3] Research Center for Advanced Science and Technology, The University of Tokyo

Abstract

In this paper, we propose a method which enables us to deal the mean and the variance of the velocity of self-driven particles in the Markov process independently. The method is constructed by applying an unit conversion of physical quantities in stochastic cellular-automaton models with discrete time. We can focus on the influence of variance on flow by removing the influence of mean using this method. When the mean velocity of each particle is constant, flow increases when the variance becomes small in the TASEP, by contrast, flow decreases when the variance becomes small in a simple evacuation model.

1 はじめに

近年、高速道路を走行する車や避難時の群集、そして人の体内を動く分子モーターなどといった自己駆動粒子のダイナミクスが数理モデル用いて活発に研究されている [1]。自己駆動粒子を扱う数理モデルは、大きく分けると三種類に分類される。一つはマクロなモデルであり、このモデルでは粒子の集合が流体のように扱われるため、流体力学を応用した研究が可能である。二つ目は、空間が連続なミクロモデルである。このモデルでは、自己駆動粒子は一つ一つの独立な粒子として扱われ、各粒子の細かい動きまで考慮した詳細なシミュレーションが可能であり、一様流不安定性の理論解析も行われている [2]。三つ目は、空間が離散なミクロモデルである。この種類のモデルの代表が確率セルオートマトン (CA) であり、車や人をはじめとする様々なモデルが考案され拡張されている [3, 4]。

確率 CA では、連続時間と離散時間のモデル両方が考えられ、モデルの粒子の速さは、連続時間の場

合はホッピングレートで、離散時間の場合はホップ確率で表されることが多い。連続時間のモデルで粒子が1セル進むのにかかる時間の分布は指数分布となり、ホッピングレートを p^c とすると、その平均も標準偏差も $1/p^c$ となる。また、離散時間のモデルで粒子が1セル進むのにかかる時間の分布は幾何分布となり、ホップ確率を p とすると、その平均は $1/p$、標準偏差は $\sqrt{1-p}/p$ となる。以上から明らかであるが、連続時間、離散時間どちらのモデルにおいても平均と標準偏差両方に p^c または p が含まれているため、それらを変化させると平均と標準偏差両方が変わってしまう。確率 CA のモデルを作る場合、p^c や p は「平均」の速さとして与えられることが多いが、実際はこの設定によって速さのばらつきまで決まってしまっていることが分かる。現実への応用考える際には、速さのばらつきが自己駆動粒子の集団全体の流れに及ぼす影響に焦点を当てたい場合もあり、平均と標準偏差を独立に変化させることができるようなモデルが望ましい。しかし、この条件を満たすモデルは、通常マルコフ過程でない複雑なものになってしまい解析が非常に困難になる。そこで本研究では、単位の変換方法を利用し、離散時間のマルコフ過程のモデルで平均と標準偏差を独立に変化させることができる方法を提案する。この方法を用いると、粒子の集団の流量に対する個々の粒子の速さのばらつきの影響を、速さの平均値を変化させることなく調べることができる。

2　独立変数の変換

離散時間のモデルでは、単位変換の際に用いるパラメータを独立変数と考えることにより、速さの平均と標準偏差を独立に操作することが可能となる。以下、数式を用いてこの方法について説明する。

改めて離散時間確率 CA のホップ確率を p とする。このホップ確率 p は1時間ステップ (step) に1セル (cell) 進む確率であるから、単位を明示的に書くと p で移動する粒子の平均の速さは、p [cell/step] となる。これを日常使う単位、例えば [m/s] に換算する場合は、1 [cell] の長さ (Δl [m/cell]) と 1 [step] の長さ (Δt [s/step]) を定めて、下記のように $\Delta l/\Delta t$ を p に掛ければよい。

$$v\left(p,\Delta l,\Delta t\right)=p\frac{\Delta l}{\Delta t}\ \text{[m/s]} \tag{1}$$

上記のように平均の速さ v [m/s] は、モデルのパラメータ p と Δl、Δt を独立変数とする関数であるが、ここでこの式を変形して、

$$\Delta t\left(v,p,\Delta l\right)=\frac{p\Delta l}{v}\ \text{[s/step]} \tag{2}$$

とし、$v,p,\Delta l$ が独立変数となるようにすると、速さの平均は v で決定されるので、p は平均を変化させずに標準偏差を調整することが可能となる。別の言い方をすれば、この方法はホップ確率 p を変化させたときに平均の速さ v が変わらないように Δt を決めていると考えることもできる。以下では、1節で述べた1セル進むのにかかる時間の平均と標準偏差が、この単位変換を応用した方法によって独立に変化させられることを確認してみる。時間ステップでの平均と標準偏差は、幾何分布の平均と標準偏差から、

$$\begin{cases}\text{平均} & :\dfrac{1}{p}\ \text{[step]}\\ \text{標準偏差} & :\dfrac{\sqrt{1-p}}{p}\ \text{[step]}\end{cases} \tag{3}$$

と求まる。これに Δt を掛けて秒での値に換算し、$\Delta t=p\Delta l/v$ を代入すると、

$$\begin{cases}\text{平均} & :\dfrac{\Delta t}{p} & =\dfrac{\Delta l}{v}\ \text{[s]}\\ \text{標準偏差} & :\dfrac{\Delta t\sqrt{1-p}}{p} & =\dfrac{\Delta l\sqrt{1-p}}{v}\ \text{[s]}\end{cases} \tag{4}$$

となり、平均を変化させずに標準偏差を変更することが可能である。上式より、1セル進むのにかかる時間の標準偏差は p の単調減少関数であることが分かる。同様の計算を行うことにより、単位変換後の速さの標準偏差も p の単調減少関数となる。従って、$p\in(0,1]$ は、$p\to 0$ でばらつきが非常に大きくなり、$p=1$ でばらつきがなくなるパラメータとして利用することができる。

次節からは、式 (2) を単位変換した離散時間の CA モデルの式に代入することにより、個々の粒子の移動速度のばらつきが流量に及ぼす影響を調べる。

3　TASEP

TASEP (Totally Asymmetric Simple Exclusion Process, 非対称単純排他過程) は、一次元確率 CA の最も基本的なモデルであり、Matrix Products Ansatz により定常分布が厳密に求められている。離散時間パラレルアップデート周期境界 TASEP は、図1のように粒子がセル上を確率 p で左から右へ移動していくモデルであり、その流量 Q は密度 ρ に対

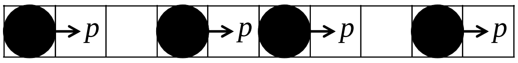

図 1: 周期境界の TASEP。右端の粒子は左端に移動する。

して、

$$Q(\rho, p) = \frac{1-\sqrt{1-4p\rho(1-\rho)}}{2} \ [\mathrm{step}^{-1}] \quad (5)$$

で与えられる。これを 1 秒当たりの流量に換算すると、

$$Q(\rho, p, \Delta t) = \frac{1-\sqrt{1-4p\rho(1-\rho)}}{2\Delta t} \ [\mathrm{s}^{-1}] \quad (6)$$

となり、さらに式 (2) を代入すると、

$$Q(\rho, v, p, \Delta l) = \frac{v}{\Delta l}\frac{1-\sqrt{1-4p\rho(1-\rho)}}{2p} \ [\mathrm{s}^{-1}] \quad (7)$$

という式が得られ、平均の早さ v に比例して流量が大きくなることが分かる。また $v = 1$ [m/s], $\Delta l = 1$ [m] として、流量-密度図を描くと図 2 のようになり、p が小さくなると流量が下がっていることが読み取れる。つまり、平均の早さが同じであっても排除体積効果 (大きさ) を持つ自己駆動粒子が一次元格子上を移動する場合、個々の粒子の速さのばらつきが増加すると流量が下がってしまうのである。

パラレルアップデート TASEP の流量の式 (5) は p が十分に小さいとき、

$$\begin{aligned} & \frac{1-\sqrt{1-4p\rho(1-\rho)}}{2} \\ = \ & \frac{1}{2}\left[1-\left(1-\frac{1}{2}4p\rho(1-\rho)+O(p^2)\right)\right] \\ \approx \ & p\rho(1-\rho) \end{aligned} \quad (8)$$

と近似的にランダムアップデート TASEP の流量の式と同じ形になる。従って、この単位変換を利用した平均とばらつきを独立に扱う方法では、全くばらつきがない場合 ($p = 1$) からランダムアップデートの程度のばらつき ($p \to 0$) まで扱えることが分かる。この極限をとる操作と本論文で導入した単位変換を両方パラレルアップデートの流量の式に施す場合、その順序は最終的な結果に影響しないので、ここでは単位変換前の式でパラレルアップデートとランダムアップデートの流量の式の対応を調べた。単位変換後の式を解析しても同様の結果を得ることができる。

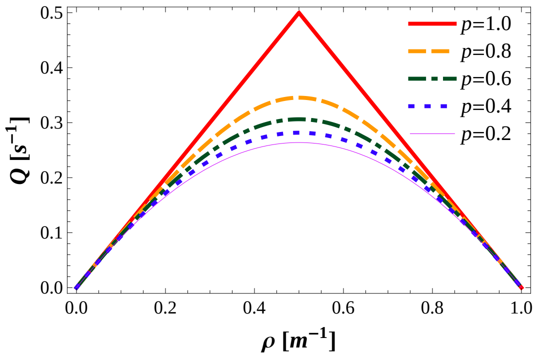

図 2: TASEP の流量-密度曲線 ($v = \Delta l = 1$)

4 退出モデル

今度は、図 3 のような非常に狭い出口から群集が退出するモデルについて考える。このモデルでは出口セルに隣接している n 個のセルそれぞれから粒子が確率 p で出口セルに移動しようとする。CA では、一つのセルに一つの粒子しか入ることができないため、同時に二つ以上の粒子が同じセルに移動しようとした場合は、衝突パラメータ $\mu \in [0, 1]$ を用いて以下のような処理を行う。

- 確率 μ で全員の移動を禁止する。
- 確率 $1-\mu$ で移動を試みた粒子の中からランダムに一つ粒子を選び、出口セルに移動させる。

出口セルに移動した粒子は、次の時間ステップに確率 p で部屋から退出する。

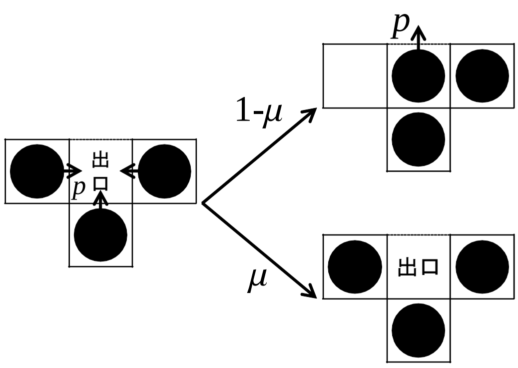

図 3: 退出モデルの模式図 ($n = 3$)。

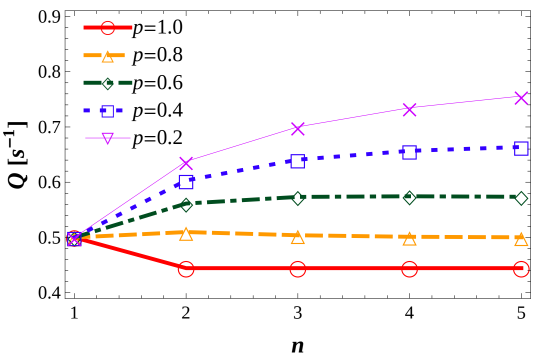

図 4: 退出モデルの流量-近傍セル数曲線 ($v = \Delta l = 1$)

このモデルで 1 [step] に退出する粒子の数、すなわち流量は、

$$Q(n,p) \quad = \quad \left[\frac{1}{r(n)} + \frac{1}{p}\right]^{-1} \quad [\mathrm{step}^{-1}] \qquad (9)$$

ただし、

$$\begin{cases} b(k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ r(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} [\{1-\mu\}\, b(k)] \end{cases} \qquad (10)$$

と書ける。TASEP の場合と同様に Δt で割って単位を $[\mathrm{s}^{-1}]$ に変換し、式 (2) を代入すると、

$$Q(n,v,p,\Delta l) = \frac{v}{\Delta l}\left[1 + \frac{p}{r(n)}\right]^{-1} \quad [\mathrm{s}^{-1}] \qquad (11)$$

となる。この式を見ると、TASEP と同じように式全体に平均の早さ v がかかった形になっているため、平均の速さ v の増加によって流量が増加することが分かる。しかし、図 4 を見ると p の影響は全く異なり、p が小さい場合、つまりばらつきが大きい場合に流量が大きくなることが確認できる。また、その差は出口に隣接するセルの数 n が大きいほど、つまり同時に出口セルに移動することができる人数の最大値が大きいほど、大きくなっている。周期境界 TASEP では、人の速さにばらつきがない方がサーキット内での人の分布が均一になり易く、その結果多くの人が移動することができるので流量が増加するが、退出モデルの場合は、同時に出口セルに移動しようとするとそこで衝突が起こってしまうため、移動のタイミングが揃っていない方が流量が大きくなるのである。

5 ペースの平均とばらつき

今回我々が得た TASEP と退出モデルでの流量の式は、どちらも $Q = (v/\Delta l)(p\,$の式$)$ という形で表されている。$v/\Delta l$ は平均の速さ v を一つのセルの長さ、すなわち一回の行動で移動する距離 Δl で割ったものであるので、粒子の行動のペース、歩行者の場合は単位時間当たりに何歩進むかというペースを表す項となっていると考えられる。一方、(p の式) は、粒子の速さのばらつきを表す p を含む項であるが、速さをどれだけ頻繁に移動するかというペースと考えれば、(p の式) はペースのばらつきを含む項と言える。従って、式 (7)、式 (11) は、流量をペースの平均を表す項とそのばらつきによる影響を考慮した項の二つに分けた表式であるとも考えられ、今後、人の歩行ペースが流量に及ぼす影響を研究する際に非常に役立つと思われる。

6 まとめ

本論文では、離散時間の確率 CA モデルの単位換算を利用して、個々の粒子の速さの平均とばらつきをマルコフ過程で独立に変化させることができる方法を提案した。離散時間の確率 CA モデルでは、よくホップ確率 p が流量などの物理量へ及ぼす影響が調べられるが、本論文の提案方法を用いれば、モデルを複雑にすることなく、個々の粒子速度の平均の影響とばらつきの影響を分けて考えることができる。今回は基本的な離散時間の確率 CA モデルである TASEP と退出モデルにこの方法を適用した。すると、TASEP では平均の速さが同じであっても、そのばらつきが大きいと流量が減少するが、退出モデルでは、ばらつきが大きいと流量が増加するという、全く逆の現象を見ることができた。

参考文献

[1] A. Schadschneider, *et al.* *Stochastic Transport in Complex Systems*. ELSEVIER, Amsterdam, 2010.

[2] M. Bando, *et al.*, *Phys. Rev. E*, Vol. 51(2), pp. 1035–1042, Feb 1995.

[3] M. Kanai, *et al.*, *J. Phys. A: Math. Gen.*, Vol. 39, pp. 2921–2933, 2006.

[4] M. Muramatsu, *et al.*, *Physica A*, Vol. 267, pp. 487–498, 1999.