

渋滞現象の大域分岐構造からの理解

佐合洋彰¹, 友枝明保^{2,3}, 三村昌泰²

¹ 明治大学大学院 理工学研究科 基礎理工学専攻

² 明治大学先端数理科学インスティテュート

³ (独) 科学技術振興機構 CREST

概要

心理作用という新しい変数を導入した交通流連続モデルを紹介する。このモデルは非線形偏微分方程式系で記述され、線形安定性解析による空間一様平衡解の安定性やそれを補う数値計算結果から渋滞流の出現について報告する。

Global bifurcation understanding of the traffic flow

Hiroaki Sago¹, Akiyasu Tomoeda^{2,3}, Masayasu Mimura²

¹ Department of Science and Technology, Graduate School of Fundamental Science and Technology, Meiji University

² Meiji Institute for Advanced Study of Mathematical Sciences

³ CREST, Japan Science and Technology Agency

Abstract

We present the traffic flow model, which introduces the new variable, amount of information. This model is described by a system of nonlinear partial differential equation, we discuss the stability of spatially constant equilibrium solution linear stability analysis, fundamental diagram and numerical simulations.

1 はじめに

交通渋滞は多大な経済損失を与えており、国土交通によれば、渋滞損失額は年間約12兆円となる。これらの渋滞を解消することが出来れば、経済損失を抑えることができ、また環境問題の面でも軽減される。

現在までに、交通流モデルの中でも、車を巨視的に捉えた連続モデルは昔から多く研究されてきた[1],[5]。近年では、CAモデルやOVモデルといった車を離散的に扱うモデルを用いて解析もなされている[2],[3],[4],[7]。

PWモデルでは、渋滞流の伝播が進行波解を用いて解析されている[6]。ここでは、連続モデルを用いることから、渋滞流の伝播が進行波解を用いて解析する。本研究の目標は、不安定解を捉え、解析を行

うことである。不安定解に摂動を与えることで、自由相と渋滞相のどちらに移りやすいかが分かる。その結果を用いて、渋滞発生を防ぐような方法を考え、渋滞解消へと繋げたいと考えている。

現在の密度の大きさや密度勾配から受ける心理作用が速度を決定すると仮定し、心理作用という新しい変数を導入した連続モデルを提案する。

2 心理作用を導入したモデル

我々は、「ドライバーは現在の密度の大きさと前方の密度差（密度勾配）から受ける心理作用をもとに速度を決定する」と考える。ここでは、心理作用により、走りたい欲求が生じると考えている。現在の密度や前方が混んでいれば、走りたいという欲求は低下し、速度もそれに伴い低下する。逆に、現在の

密度や前方が空いていれば、走りたいという欲求が生まれ、速度を上げる。したがって、心理作用の影響を受けて速度を決めるが、速度は密度と密度勾配から得る欲求の線形和から定義する。ここで重要なのは、現在の密度の大きさや密度勾配から心理作用の影響を受ける際、時間遅れが生じると考えることである。密度や密度勾配を受け、瞬時に心理作用の影響を受けるとは考えにくく、ある程度の時間遅れが生じると考えるのが妥当である。

空間 x 、時間 t とし、密度を $\rho(x, t)$ 、速度を $v(x, t)$ 、流量を $q(x, t)$ とする。このとき、それぞれ車の台数保存則、基本関係式として、

$$\rho_t + q_x = 0, \quad (2.1)$$

$$q = \rho v \quad (2.2)$$

が成り立つ。我々はモデリングにおいて、

1. ドライバーは密度と密度勾配から、心理作用の影響を受ける
2. それらの心理作用の影響を判断する際に、時間遅れが発生する
3. 速度は心理作用の線形和で決まる

と仮定する。現在の密度、密度勾配から受ける心理作用をそれぞれ $c_1(x, t)$ 、 $c_2(x, t)$ とすると、速度 v は、仮定 3 より、

$$v = \alpha c_1 + \beta c_2, \quad \alpha, \beta > 0 : \text{定数} \quad (2.3)$$

とする。(2.1), (2.2), (2.3) より、

$$\rho_t + ((\alpha c_1 + \beta c_2)\rho)_x = 0 \quad (2.4)$$

が得られる。また、仮定 1,2 より、

$$\begin{cases} \tau_1 c_{1t} = a_1 h(\rho) - b_1 c_1, & (2.5a) \\ \tau_2 c_{2t} = -a_2 (\log \rho)_x - b_2 c_2, & (2.5b) \end{cases}$$

とする。ここで、 τ_1, τ_2 は時間遅れ、 $a_1, a_2, \alpha, \beta, b_1, b_2$ はパラメータ、 $h(\rho)$ は密度に対してある心理作用の影響を与える関数である。

(2.5a) の左辺は、時間遅れ τ_1 を含む時間変化、右辺第 1 項は、現在の密度から受ける心理作用を $h(\rho)$ 、第 2 項は減衰項である。減衰項は、心理作用が薄れることを意味している。時間が経つにつれ、心理作用が薄れる影響をこの項は表している。

(2.5b) の左辺は、時間遅れ τ_2 を含む時間変化、右辺第 1 項は、前方の密度差から受ける心理作用、第 2 項は減衰項である。右辺第 1 項が対数の空間変化

で入っているのは、フェヒナーの法則を用いている [8]。フェヒナーの法則とは、「心理的な感覚量は、刺激の強度ではなく、その対数に比例して近くされる」ことである。すなわち、前方の密度勾配を対数に比例して心理作用の影響を受けると仮定している。

(2.4), (2.5a), (2.5b) より、我々の提案するモデルは、

$$\begin{cases} \rho_t + ((\alpha c_1 + \beta c_2)\rho)_x = 0, \\ \tau_1 c_{1t} = a_1 h(\rho) - b_1 c_1, \\ \tau_2 c_{2t} = -a_2 (\log \rho)_x - b_2 c_2, \end{cases} \quad (2.6)$$

となる。

本論文では、密度勾配よりも密度の方が渋滞に影響を及ぼすのではないかと考え、密度勾配から受ける心理作用の影響に関しては瞬時に判断するという状況を考える。すなわち、(2.6) で、 $\tau_2 \rightarrow 0$ とした簡易化したモデル

$$\begin{cases} \rho_t + (\alpha c_1 \rho)_x = \frac{\beta a_2}{b_2} \rho_{xx}, \\ \tau_1 c_{1t} = a_1 h(\rho) - b_1 c_1, \end{cases} \quad (2.7)$$

を考える。(2.7) に対して、変数変換 $\frac{\beta a_2}{b_2} = D, \frac{a_1}{b_1} = a, \frac{\tau_1}{b_1} = \tau$ を施すと、

$$\begin{cases} \rho_t + (c_1 \rho)_x = D \rho_{xx}, \\ \tau c_{1t} = a h(\rho) - c_1, \end{cases} \quad (2.8)$$

が得られる。今回の発表では、道路長 L の周期境界条件を課した、(2.8) で表されるモデルについて得られたいくつかの結果について発表する。

2.1 $h(\rho)$ の関数形

まず、 $h(\rho)$ の関数形について述べる。

$h(\rho)$ はある密度に対して、心理作用の影響を与える関数である。密度によってどれくらい走りたいかという心理作用を与える関数は、OV 関数と類推していると考え、ここでは、

$$h(\rho) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{\rho - 0.55}{0.66}\right)} - 3.72 \times 10^{-6} \quad (2.9)$$

とする [2]。(図 2.1 参照)

自然渋滞は空間一様平衡解に対する摂動が不安定化することから起こると考えて、先ず空間一様平衡解の安定性を線形安定性解析から考察する。

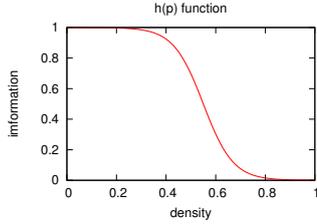


図 2.1: $h(\rho)$ の関数形

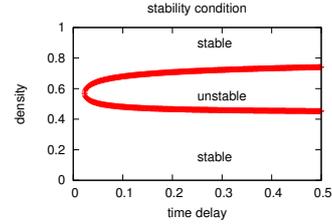


図 3.1: 安定性グラフ ($D = 0.1, L = 10$)

3 線形安定性解析

(2.8) の一様平衡解を (ρ^*, c_1^*) とする. ここで, ρ^* は任意正定数, $c_1^* = ah(\rho^*)$ である. この解に微小摂動を与える.

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &= \rho^* + \xi(x, t), \\ c_1(x, t) &= c_1^* + \eta(x, t). \end{aligned} \quad (3.1)$$

(3.1) を (2.8) に代入し, 線形化すれば,

$$\begin{cases} \xi_t + \rho^* \eta_x + c_1^* \xi_x = D \xi_{xx} \\ \tau \eta_t = ah'(\rho^*) \xi - \eta \end{cases} \quad (3.2)$$

を得る. ここで,

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= A_k(t) \exp(ikx) \\ \eta(x, t) &= B_k(t) \exp(ikx) \end{aligned} \quad (3.3)$$

とする. ただし, $A_k = a_1 + ia_2, B_k = b_1 + ib_2$.

(3.3) を (3.2) に代入して整理すると,

$$X' = PX \quad (3.4)$$

となる. ただし,

$$X = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -k^2 D & kh & 0 & k\rho^* \\ kh & -k^2 D & -k\rho^* & 0 \\ \frac{\alpha}{\tau} h' & 0 & -\frac{1}{\tau} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{\tau} h' & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{pmatrix}.$$

行列 P の固有多項式は,

$$\begin{aligned} &\lambda^4 + \left(2Dk^2 + \frac{2}{\tau}\right) \lambda^3 \\ &+ \left(h^2 k^2 + d^2 k^4 + \frac{1}{\tau^2} + \frac{4Dk^2}{\tau}\right) \lambda^2 \\ &+ \frac{2k^2}{\tau} \left(\frac{D}{\tau} + h + Dk^2 + ah'h\rho^*\right) \lambda \\ &+ \frac{k^2}{\tau^2} \left(h^2 + D^2 k^2 + 2ah'h\rho^* + a^2 h'^2\right) = 0 \end{aligned}$$

となり, 全ての固有値 λ が負となる時, (ρ^*, c_1^*) は漸近安定である.

空間一様平衡解の安定性を, 横軸が時間遅れ, 縦軸が密度でプロットしたのが図 3.1 である. 図 3.1 から, τ が小さいときには, 渋滞が起きにくいことが予想される. また, τ を適当に固定し, ρ を大きくすると, 安定, 不安定, 安定と安定性が変化する.

4 シミュレーション結果

ここでは, 不安定な一様平衡解に摂動を与えた時, どのような解が出現するのかをシミュレーションによって考察する. パラメータの値は, 以下の通りである. $L = 10, a = 1.0, D = 0.1, \tau = 0.2, \rho^* = 0.5, dx = 10^{-2}, dt = 2.0 \cdot 10^{-4}$.

図 4.1 から図 4.2 が, 各時刻での数値計算結果である. 赤が ρ , 青が c_1 で, ρ に摂動を与えてある. 不安定領域でのパラメータでは, 一様平衡解に摂動を与えたとき, 時間経過の後に不安定化し, 空間非一様な進行波が現れる. また, 図 4.3, 図 4.4 が揺らぎの成長過程と十分時間が経ったときの時空図 (縦軸が時間, 横軸が空間) である. 十分時間が経ったとき, 不安定化によって生じる解は, 時空図より, 一定の速度で後方へ進むことが分かる.

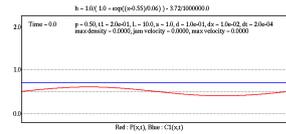


図 4.1: 時刻: 0.0

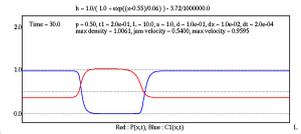


図 4.2: 時刻: 30.0

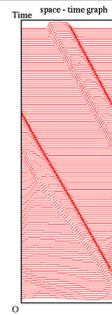


図 4.3: 時刻 0-30.0. 揺らぎが成長する過程

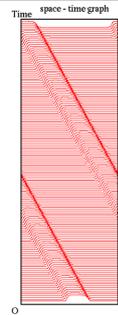


図 4.4: 時刻 170.0-200.0, 十分時間が経った時空図

渋滞の移り変わる過程を調べるために, 安定性が切り替わる 0 固有値付近を詳しく調べる.

5 大域分岐構造

横軸に平均密度，縦軸に渋滞速度の絶対値とした分岐図が図 5.1 である。ここで，渋滞速度は数値計算で以下のように求めた。

まず，渋滞流と直線 $y = a$ (渋滞流と 2 点で交わるように a を定める) の交点 (x_i, ρ_i) を求め，微小時間 dt 後に同様にして (x_i^*, ρ_i^*) を求める。そして， $\frac{x_i^* - x_i}{dt}$ で渋滞速度を求めた。

図 5.1 において，平均密度 0.4 付近で，ヒステリシスが起きていて，2 つの安定な一様平衡解，進行波解が共存している。

不安定解の存在を調べるために，以下に示す 2 つの異なる初期値で数値計算を行った。図 5.2 の初期値 (a) よりも図 5.3 の初期値 (b) の方がより一様解に近い初期値となっている。

図 5.2, 図 5.3 を初期値としたとき，それぞれ図 5.4, 図 5.5 のような時空図が得られる。

図 5.2 の初期値 (a) のときは，進行波となり，図 5.3 の初期値 (b) としたときは，一様解となる。したがって，初期値に依存して進行波，一様解の双方が確認されることから，不安定解が存在するのではないかと考えられる。

6 基本図

(2.8) のモデルの基本図が図 6.1 である。基本図は，十分時間が経ったときの，安定な解における密度と流量の平均をそれぞれプロットした。

分岐理論より，メタ安定領域 ($0.35 < \rho < 0.45$ 付近) では自由相と渋滞相が双安定である。分岐解がどちらの相に移りやすいかが，今後の研究課題である渋滞現象を理解する上で重要になると考えている。

7 結論

本稿で提案した心理作用という新しい変数を導入したモデルは，OV モデルと類似したモデルであることから，線形安定性解析，基本図は，先行結果と似たような結果が得られた。

しかし，渋滞流に関しては，進行波解析によって多くの情報が得られると考えている。

参考文献

- [1] M.J.Lighthil et.al. Proc.R.Soc.A **229**,281(1955)
- [2] M.Bando et.al.,J.Phys. I France **5**,1389(1995)

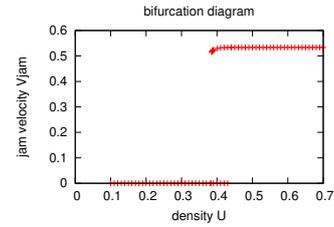


図 5.1: 分岐図 ($D = 0.1, \tau = 0.2$)

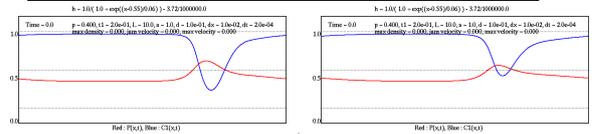


図 5.2: 初期値 (a)

図 5.3: 初期値 (b)

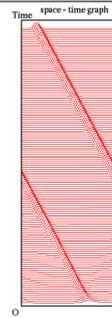


図 5.4: 時刻 0-30.0, 進行波の発生

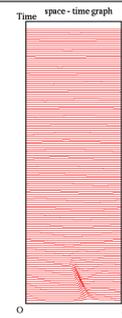


図 5.5: 時刻 0-30.0, 一様解に収束

- [3] M. Bando et.al., Phys. Rev. E **51**,1035(1995)
- [4] K. Nakanishi et.al., Phys. Rev. E **55**,6519(1997)
- [5] B.S.Kerner et.al., Phys.Rev. E, **48R2335**(1993)
- [6] Tong Li, Physica D **207**,41-51(2005)
- [7] K.Nagel et.al., J.Phys.I France **2**,2221(1992)
- [8] M.Makoto, IEEE Communications Magazine, **51**(1988)

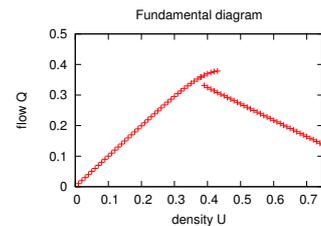


図 6.1: 基本図 ($D = 0.1, \tau = 0.2$)