ジャグリングにおける物体の数と投げる時間間隔に対する投げる高さの条件

吉成耕平

神戸大学 発達科学部 人間環境学科

概要

本研究では 3 種類（シャワー，カスケード，片手投げ）のジャグリングにおける投げる高さの条件を，投げる時間間隔と扱う物体の数で表す．カスケードや片手投げなどの uniform juggle についての高さの条件は Shannon の式から導ける．Shannon の式から導いたこの高さの条件について考察し，uniform juggle でないシャワーに対しての高さの条件を導く．

The condition of throw height in juggling for the number of objects and time interval of throws

Kohei Yoshinari

Department of Human Environmental Science, Faculty of Human Development, Kobe University

Abstract

The purpose of this study is to understand how the condition of throw height for three kinds of juggling (shower, cascade, one-handed) depends on time interval of throws and the number of objects. The conditon of throw height for uniform juggle, which contains cascade and one-handed, is obtained from Shannon's equation. We interpret the condition for uniform juggle and show the condition for shower juggling which is not uniform juggle.

1 はじめに

本論文ではジャグリングについて考える．一般によく知られよく行われるジャグリングの種類はシャワー，カスケード，ファウンテンの 3 つである．シャワーは物体の軌道が円を描くもので，一方の手で物体を高く投げ上げ，もう一方の手は物体をほぼ水平に投げる．カスケードは物体の軌道が ∞ の字を描くもので，左右対称な投げ方である．ファウンテンは右手と左手が独立に同じ数の物体を扱うものである．ファウンテンは片手投げに読み替えることができるので，この論文ではシャワー，カスケード，片手投げについて議論する．

ジャグリングは物体の流れであり人間の制御によって行われている．もちろん人間の制御なしではジャグリングは成り立たないが，物理的制約により人間の制御を考える以前の条件があると考えられる．

ジャグリングにおいて物理的考察からの条件を式で表したものとして Shannon の式がある．Shannon は，物体を投げてから次の物体を捕球するまでの時間 V（vacant time），物体を捕球してからその物体を投げるまでの時間 D（dwell time），物体が手を離れてから次の手に到着するまでの時間 F（flight time）に注目した．たとえばシャワーでは高く投げ上げられた物体の飛行時間と水平に投げられる物体の飛行時間という値の異なる飛行時間 F があるように，一般には 1 つの種類のジャグリングにおいて V, D, F はそれぞれいくつかの値をもちうる．しかし，V 同士，D 同士，F 同士がそれぞれすべて同じ値をもち，1 つの手に同時に 2 つ以上の物体がないジャ

グリングを考え，Shannon はこれを uniform juggle と名づけた．そして，uniform juggle において

$$\frac{D+F}{D+V} = \frac{B}{H} \tag{1}$$

が成り立つことを示した（[1]）．これが Shannon の式である．ここで，B は物体の数，H は手の数である．

この Shannon の式は時間に関する関係式であり，手の数 H と物体の数 B を決め，V，D，F のうち 1 つの値を指定すると他の 2 つの関係がわかるというものである．しかし，これはジャグリングをする人にとっては有益とはいえない．そもそも V，D，F という量は感知しにくくそれゆえ制御もしにくいからである．

著者が考えるジャグラーにとって制御可能で必要な情報は物体を投げ上げる高さである．投げるべき高さがあらかじめわかっていればジャグリングの習得の助けとなる．また，ジャグリングに最低限必要な高さがわかれば天井の高さなどからその場所でジャグリングが可能かどうかがわかる．このようにジャグリングにおいて投げる高さは重要な要素となる．しかし，ジャグリングの研究において高さに言及したものはあまりない．本研究では物理的考察に基づいてジャグリングにおける高さの条件を導く．

具体的に投げる高さが何に依存するかを考えると，物体を投げる時間間隔と物体の個数が挙げられる．物体の個数が多くなるほど，また投げる時間間隔が大きくなるほど投げる高さは大きくなると予測できる．よって，最終的には投げる高さの条件を物体の個数と物体を投げる時間間隔で表すことになると考えた．物体を投げる時間間隔は，物体を投げる高さ同様制御しやすい．投げる時間間隔に対する高さの条件を導くことができれば，この条件を満たす間隔と高さを使いジャグリングの上達が期待できる．

この論文ではシャワー，カスケード，片手投げにおける高さの条件を示す．次の第 2 節で uniform juggle についての高さの条件を Shannon の式を使って示す．代表的なジャグリングであるシャワー，カスケード，片手投げの中で，カスケードと片手投げは uniform juggle である．しかし，飛行時間 F が 2 種類あるシャワーは uniform juggle ではないので，式 (1) から導かれた条件はシャワーには適用できない．よって，シャワーについての高さの条件を求めるために，第 3 節で uniform juggle についての高さの条件の背後にある論理について考察する．そして，その議論における解釈から第 4 節ではシャワーについての条件を導く．

2　uniform juggle の高さの条件

Shannon の式 (1) から物体が投げられる高さ h の条件を uniform juggle の場合に導く．まず，K を物体を投げる時間間隔，つまり

$$K \equiv V + D \tag{2}$$

で定義する．これは手に着目したときの周期ともいえる．さらに，この周期 K のうちどれだけの時間物体を持っているかの割合，つまり

$$k \equiv \frac{D}{V+D} = \frac{D}{K} \tag{3}$$

として k を定義する．式 (2)，(3) を使うと，式 (1) は

$$F = \left(\frac{B}{H} - k\right) K \tag{4}$$

と変形できる．また，物理的な議論から

$$F = \sqrt{\frac{8h}{g}} \tag{5}$$

ということがすぐにわかる．ここで，g は重力加速度である．式 (4) と式 (5) から，h について

$$h = \frac{g}{8}\left(\frac{B}{H} - k\right)^2 K^2 \tag{6}$$

となる（[2]）．この式から高さを求めるには k を決めなければならない．k は 1 つには決まらないが範囲がある．定義から

$$0 < k < 1 \tag{7}$$

なので，式 (6) は

$$\frac{g}{8}\frac{(B-H)^2}{H^2}K^2 < h < \frac{g}{8}\frac{B^2}{H^2}K^2 \tag{8}$$

と書き換えられる．これが uniform juggle に対する高さの条件である．

この式 (8) を使うと，片手投げの場合は $H = 1$ として

$$\frac{g}{8}(B-1)^2K^2 < h < \frac{g}{8}B^2K^2 \tag{9}$$

となり，カスケードの場合は $H = 2$ として

$$\frac{g}{32}(B-2)^2K^2 < h < \frac{g}{32}B^2K^2 \tag{10}$$

となる．

3 物理的解釈

ここからの目的はシャワーについての高さの条件を導くことである．しかし，前述の uniform juggle のように Shannon の式から導くことはできない．しかし，シャワーにも適用できる物理的条件を抽出することができれば，それを使うことでシャワーについての高さの条件がわかる．ここでは，uniform juggle についての高さの式からシャワーにも適用できる条件を考察する．

前述のように，uniform juggle における投げる高さは扱う物体の数と投げる時間間隔によって不等式で表される．ここでは，不等式になる物理的理由を考える．このために式 (4) において式 (7) を使った次の式を考える．

$$\left(\frac{B}{H}-1\right)K < F < \frac{B}{H}K \tag{11}$$

これと式 (5) を使うと式 (8) が導けるので，式 (8) の代わりに式 (11) について考えても差し支えない．この式 (11) は物体の飛行時間に関する条件である．

式 (11) について具体的に考える．例えば片手で 2 個の物体（物体 O_1 と物体 O_2）を扱っている場合を考える．ある時刻 $t=0$ に物体 O_1 を投げたとすると，投げる時間間隔 $K(=V+D)$ は一定なので時刻と手が投げる物体の関係は表 1 のようになる．物体 O_1 が手に着く時刻 $t=F$ は，物体 O_2 が投げられる時刻 $t=K$ より後，かつ物体 O_1 が再び投げられる時刻 $t=2K$ より前でなければならない．つまり，F の満たすべき条件は

$$K < F < 2K \tag{12}$$

である．これは，式 (11) において $H=1$，$B=2$，つまり物体 2 個の片手投げのジャグリングとしたときの式に一致する．

表 1：投げる物体（片手投げ 2 個）

時刻	0	K	$2K$
物体	O_1	O_2	O_1

この例において F の条件は，着目した物体が投げられて次の手に着く時刻は，次にその物体が着く手が投げるべき物体を投げた時刻より後，かつそのさらに K 経った時刻より前であるということから得られた．つまり，物体が投げられてからその物体が次に着く手が投げるべき物体をすべて投げるまでにかかる時間を B と K の関数 $f(B,K)$ とすると

$$f(B,K) < F < f(B,K)+K \tag{13}$$

が飛行時間 F の満たす条件である．式 (8) はこの考えから導かれたと考えることもできる．結局，高さの式を出したいなら $f(B,K)$ を推定すればいい．

4 シャワーについての高さの条件

上で議論したように高さの条件を導出するためには飛行時間 F の条件を考えればいいことがわかった．ここでは，式 (1) からは導けないシャワーについての高さの条件を導く．シャワーでは，1 つの手（利き手の場合が多い）が物体を高く上げ，もう一方の手がほぼ水平に物体を投げる．以下では議論しやすいように右手で物体を高く投げ上げ，左手で物体を水平に投げているとする．

シャワーでは，手は左右とも間隔 K の周期で動いているので投げる時間間隔 K は一定であるとして議論する．また，物体の飛行時間は 2 種類あるが，右手で投げられた物体の飛行時間を F とする．この場合，式 (5) の h は右手で高く投げられた物体の高さになり，以下で導く h の条件はシャワーをするのに必要な高さの条件ということになる．

さらに，右手が投げてから左手が投げるまでの時間間隔を a とする．左手が右手よりはやく投げる場合は a は負の値をとる．左手から水平に投げられた物体の飛行時間を F' とすると，a が負のときは右手が物体を投げるより早く左手から投げられた物体が到着しないという条件から，$-a < F'$ でなければならない．また，a が正のときは左手が遅く投げすぎると右手から間隔 K で投げられないので，$a+F' < K$ でなければならない．よって，a の範囲は $-F' < a < K-F'$ となる．

物体が 3 個の場合（O_1，O_2，O_3 がこの順番に投げられている）を考える．右手から物体 O_1 がある時刻 $t=0$ に投げられたとする．この場合の時刻と投げる物体の関係を表 2 に示した．物体 O_1 が左手に着くのは，物体 O_3 が左手に投げられた後かつ，物体 O_1 が左手に投げられるより前でなければならない．つまり

$$K+a < F < 2K+a \tag{14}$$

が成り立つ．

同様に物体が B 個（O_1，O_2，O_3，…，O_n）の場合について考える．右手で高く投げられた物体の飛

行時間 F の満たすべき条件は以下の式と考えられる．

$$(B-2)K+a<F<(B-1)K+a \tag{15}$$

これに式 (5) を代入して h について解くと，

$$\frac{g}{8}\{(B-2)K+a\}^2<h<\frac{g}{8}\{(B-1)K+a\}^2 \tag{16}$$

となる．

$a=0$，つまり右手と左手が同時に物体を投げるとき，式 (16) は以下の式になる．

$$\frac{g}{8}(B-2)^2K^2<h<\frac{g}{8}(B-1)^2K^2 \tag{17}$$

この式と片手投げについての式 (9) を比較すると，物体が b 個の片手投げと $b+1$ 個のシャワーについての高さの条件は同じになることがわかる．この場合のシャワーは，左右の手が物体を同時に 2 つ持つことを許される 1 つの「手」として振舞っていると解釈できる．

表 2：投げる物体（シャワー 3 個）

時刻	0	a	K	$K+a$	$2K$	$2K+a$
右手	O_1		O_2		O_3	
左手		O_2		O_3		O_1

5 終わりに

本論文では，シャワー，カスケード，片手投げに対する高さの条件を導いた．ここまでは，シャワーの条件を導くために k の範囲の式 (7) を使い高さの条件を不等式に表したが，k が 1 つに決まれば h も 1 つに指定できる．k についての研究はいくつかあり，その研究の実験によると $k=0.75$ がよくみられるということである（[3]）．以下で具体的な数値を設定し高さを出すが，そこでは $k=0.75$ として計算する．

投げる時間間隔が 0.35 秒，つまり $K=0.35\mathrm{s}$ で，重力加速度を $g=0.98\mathrm{m/s}^2$ とする．投げる時間間隔が 0.35 秒であるとは比較的速く手を動かすことに相当する．シャワーについては $a=0$ つまり，右手と左手が同時に動くとする．以上をふまえて，高さの条件として式 (6) に $k=0.75$ を代入した以下の式を使う．

$$h=\frac{g}{8}\left(\frac{B}{H}-0.75\right)^2K^2 \tag{18}$$

この式 (18) で $H=1$ とすると片手投げ，$H=2$ とするとカスケード，$H=1$ かつ B を $B-1$ とするとシャワーの式になる．この式 (18) を使うと投げる高さは表 3 のようになる．本論文の結果からこのように投げる高さをあらかじめ知ることができ，ジャグリング習得の役に立つ．

表 3：投げる高さ（間隔 $K=0.35\mathrm{s}$）

種類	高さ（m）
片手投げ（$B=3$）	0.75
カスケード（$B=3$）	0.084
シャワー（$B=3$）	0.23
シャワー（$B=4$）	0.75

また，この論文では高さの式 (8) の物理的解釈も示した．式 (8) は飛行時間 F の条件式 (13) を反映したものであることがわかった．今回はこの物理的解釈を使い uniform juggle でないシャワーについての式を導くことができた．本研究では，先行研究の結果から広く適用できる条件を抽出し新たな対象に対して適用した．

より広くジャグリングを科学の対象とみると，その研究の目的としては，視覚や触覚、腕による運動制御の理解，ジャグリングロボットの開発，数学的な探究などがある．著者の興味は 1 つ目の運動制御に近い．本論文では物体の動きに焦点を当てたが，今後は，腕の動きも含めたシステムとしてジャグリングを議論するつもりである．腕の制御を理解することで人間についての理解が進む．世の中の多くのシステムが人間の影響を受けているので，人間を理解することは必要である．ジャグリングの研究を通して，地球に存在するシステムの多くを理解することにつながることが期待される．

参考文献

[1] C. E. Shannon, "Scientific aspects of juggling", N. Sloane, A. Wyner (eds), *Claude Elwood Shannon: Collected papers*, IEEE Press, New York, (1993) 850-864

[2] B. Polster, *The Mathematics of Juggling*, Springer-Verlag, New York (2003)

[3] P. J. Beek, M. T. Turvey, *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, **18**, No. 4, (1992) 934-947