

# 流体力学的相互作用を組み込んだ粒子法による 粉体なだれのパターン形成

新屋 啓文, 栗津 暁紀, 西森 拓

広島大学大学院 理学研究科 数理分子生命理学専攻

## 概要

ポリスチレン粒子を斜面上に流した場合、なだれ前端が不安定化し、波状のパターン（複数の頭部）が形成すると報告されている。そして、実験では低密度粒子を用いているため、頭部の形成要因は、なだれの駆動力である重力と空気抵抗であると考えられる。そこで、我々は空気抵抗が粉体なだれへ及ぼす影響を調べるため、粉体-流体間相互作用を組み込んだ粒子法を構築した。今回は、粒子数を一定にし、初期配置に円型と直線型の2種類を用い、なだれの前端で生じる頭部形成について調べた。その結果、I) 円型の場合、単体の頭部が形成され、なだれ内部に渦対が生じる。II) 直線型の場合、なだれ前端が不安定化し、複数の頭部が形成される。さらに、粒径と頭部の厚さ、幅にスケーリング則が成り立つことを確認した。

## Pattern Formation of Granular Avalanches Simulated by Particle Method with Hydrodynamics Interaction

Hirofumi Niiya, Akinori Awazu, Hiraku Nishimori

Department of Mathematical and Life Sciences, Hiroshima University.

## Abstract

It is known that the granular flow consisting of the polystyrene particles forms wavy pattern with many heads at the moving front of avalanche. The experiment using the lightweight granular particles implies that the instability of the moving front and the subsequent head formation are driven by the gravity force and the air drag. To elucidate the instability mechanism of this kind of granular avalanche, we propose a particle method considering the interaction between the granular and the fluid. Using the model, we simulate the head formation at the moving front of avalanche under the condition where total particle number is constant. It is found that; I) In the case of the circular starter, a single head is formed and the vortex convection emerges inside the avalanche. II) In the case of the linear starter, the air drag destabilizes to deform the wavy pattern at the moving front of avalanche. Moreover, the relations among the particle radius, head thickness, and head width satisfy the scaling law.

## 1 はじめに

我々は、なだれを雪崩に限らず、岩屑流、火砕流、土石流など、重力流や密度流といった異なる大規模な斜面崩壊現象全般として議論する。これらの流れ

は、固体と流体が混合した状態で斜面を下り、なだれ前端に大きな物質が集まり頭状の大きな脹らみ、なだれ後端に小さな物質が集まり尾状の細長い、頭部-尾部構造を形成するなど共通した機構を持つことが知られている。また、頭部-尾部構造を形成す

る要因として、重力と流体の抵抗力（空気抵抗など）の比が重要と考えられている。例えば、高密度粒子であるガラスビーズを斜面上に流した場合（重力  $\gg$  空気抵抗）、頭部-尾部構造は形成されないが、なだれ前端で波状のパターン（複数の頭部）が形成される [1]。一方で、低密度粒子であるポリスチレンを斜面上に流した場合、頭部-尾部構造が形成され、かつ、なだれ前端で粒径に依存した大きさの頭部が形成されると報告されている [2, 3]。これら実験に対する理論的考察として、なだれを流体とみなした流体モデルや、なだれを一つの大きな粒子とみなした質量中心モデルなどがあり、いずれも実験結果と対応している [4, 5, 6, 7, 8, 9]。しかしながら、既存の実験では、粉体を用いているため流体でなく、さらに、多数の粉体を含んでいるため粉体間相互作用を考慮すべき必要がある。そこで、我々は空気抵抗が粉体なだれへ及ぼす影響を調べるため、粉体-流体間相互作用を組み込んだ粒子法を構築した。本研究では、構築した粒子法を用い、粉体なだれのパターン形成（頭部-尾部構造や頭部形成）や内部構造について調べた。

## 2 粒子モデル

本モデルは、2次元平面上を運動する粉体を球状粒子（3次元）で表現し、粒子の回転を無視し、並進運動のみを考慮している。注意として、本来の斜面流は平面上の運動だけでなく、3次元的な動きも含んでいる。そのため、本モデルは、2枚の平板で形成された薄い層を流れ落ちる粉体のダイナミクスに適用しているが、本モデルの3次元への拡張は容易である。また、粒子に働く力として、なだれの駆動力である鉛直下向きの重力と粉体同士の接触力（排除体積効果）、空気抵抗である流体から受ける力の3つを取り入れる。

まず、重力  $\mathbf{F}_g$  は粉体と流体の密度差を考慮し、

$$\mathbf{F}_g = -e_y V g (\rho_p - \rho_f) \quad (1)$$

として与えられる。ここで、 $e_y$  は  $y$  軸方向の単位ベクトル、 $V$  は粉体の体積、 $g$  は重力加速度、 $\rho_p, \rho_f$  はそれぞれ粉体と流体の密度を表す。

次に、接触力  $\mathbf{F}_c$  は弾性バネで記述されるが、粒子の回転を考慮しないため、

$$\mathbf{F}_c = -e_\theta k_n \delta, \quad e_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad (2)$$

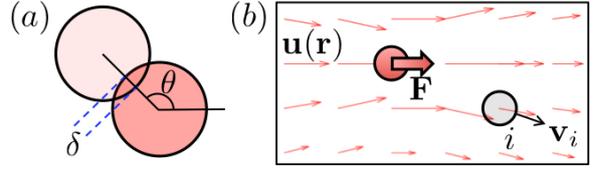


図 1: (a) 粒子同士の接触 (b) 粒子が作り出す速度場と誘起される粒子  $i$

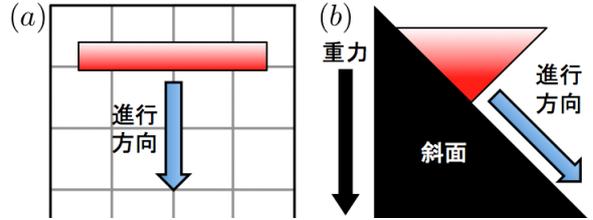


図 2: 2種類の2次元系、(a) モデル I（上面図） (b) モデル II（側面図）

として法線方向のみに用いる。ここで、 $\theta$  は2粒子のなす角、 $e_\theta$  は回転行列、 $k_n$  はバネ定数、 $\delta$  は粒子間の接触距離を表す。

最後に、我々は流体から受ける力を流体を介した粒子間（長距離）相互作用として考慮した。つまり、粉体の運動が流体を介して即座に粉体へ伝わりと仮定し、ストークス近似下、かつ、粒子濃度が希薄な場合に厳密に成り立つ Rotne-Prager テンソル（式 (3)）を用い、流体を介した粒子間（長距離）相互作用を考慮した。

$$J(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \left[ \mathbf{I} + \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^2} + \frac{2}{3} \left( \frac{a}{r} \right)^2 \left( \mathbf{I} - 3 \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^2} \right) \right] \quad (3)$$

$$(\mathbf{r} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$$

ここで、 $\mathbf{I}$  は単位テンソル、 $\mathbf{r}_i$  は粒子  $i$  の座標、 $r$  は粒子間距離、 $a$  は粒子半径を表す。

留意点として、なだれのように粉体が高速で密に運動している状態では、ストークス近似の適応から外れてしまう。そのため、本モデルは、通常のなだれよりレイノルズ数が低いポリスチレンのような低密度の斜面流 [2, 3] を想定しており、粉体間の流体力学的相互作用を現象論的に考慮している。また、本モデルは粒子の慣性を無視しているため、粒子  $i$  の速度  $\mathbf{v}_i$  は自身に働く力（式 (1),(2)）から得られる速度に加え、式 (3) を用い他粒子が作り出

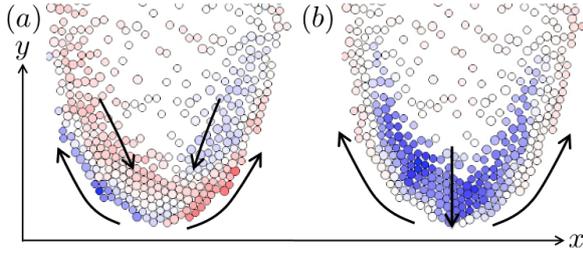


図 3: なだれ内部の粒子速度、(a)  $x$  方向の速度: 赤が右、青が左向きを速度を表す。(b)  $y$  方向の速度: なだれ前端の速度に対し、赤が上向き青が下向きの速度を表す。

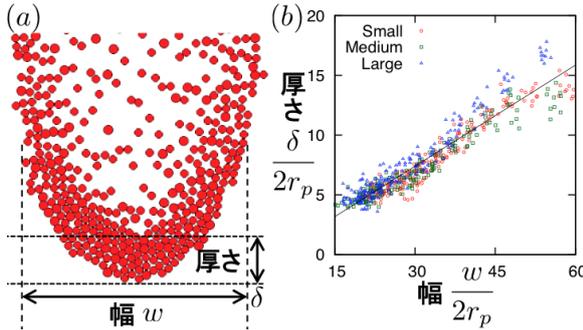


図 4: (a) 頭部の厚さと幅の定義 (粒子数の密な部分) (b) 粒径で規格化した頭部の厚さと幅: サンプル数は 10 である。

す速度場の足し合わせで決定される。

$$\mathbf{v}_i = \frac{\mathbf{F}_i}{6\pi\mu a} + \sum_{j \neq i}^N \mathbf{u}_i(j) \quad (4)$$

$$\mathbf{u}_i(j) = \frac{1}{8\pi\mu r} \left[ \mathbf{I} + \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^2} \right] \cdot \mathbf{F}_j + \frac{a^2}{12\pi\mu r^3} \left[ \mathbf{I} - 3\frac{\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^2} \right] \cdot \mathbf{F}_j$$

ここで、 $\mu$  は流体の粘性率、 $\mathbf{u}_i(j)$  は粒子  $j$  が粒子  $i$  に与える誘起速度を表している。

### 3 数値結果

我々は上記モデルを用い、なだれ前端の不安定化およびパターン形成に着目した。そして、一定角度の斜面 ( $\theta = 45^\circ$ ) 上を粒子が運動する状況を想定し、以下の 2 種類の 2 次元系で計算を行った (図 2)。

**モデル I** なだれを上から見た場合の 2 次元平面: ただし、斜面との接触を考慮しないため、傾斜角の影響を  $g \sin \theta$  として、重力に反映させる。

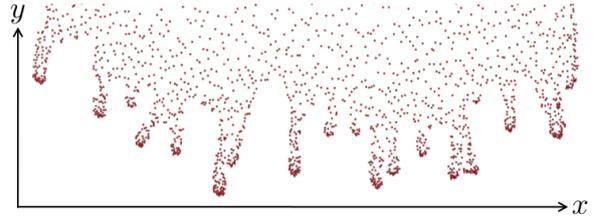


図 5: なだれ前端での頭部形成: 初期配置に直線型、粒子の半径  $r = 10^{-3}$  を使用

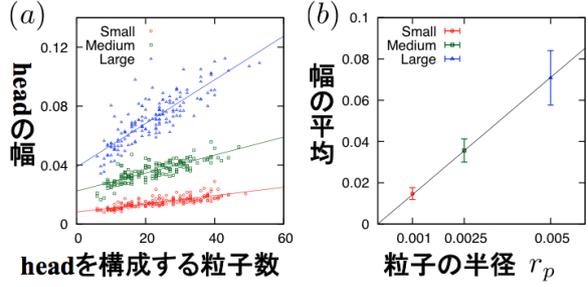


図 6: (a) 頭部を構成する粒子数と頭部の幅 (b) 粒子の半径と頭部の平均幅、図中の棒線は絶対偏差を表す。

**モデル II** なだれを進行方向に沿った側面から見た場合の 2 次元平面: 斜面との接触は粒子同士の接触と同様に弾性バネで記述される。

また、パラメータの値は、粉体をポリスチレンのような低密度粒子、流体を空気として想定するため、粉体の半径:  $r_p = (1 \pm 0.05)s \times 10^{-3} [\text{m}]$ ,  $s = \{1.0, 2.5, 5.0\}$  (small, medium, large) のように 3 種類の異なる大きさの粒子、密度:  $\rho_p = 20 [\text{kg m}^{-3}]$ 、バネ定数:  $k_n = 10 [\text{N m}^{-1}]$ 、流体の密度:  $\rho_f = 1.2$ 、粘性率:  $\mu = 1.82 \times 10^{-5} [\text{Pa s}]$  として与えられる。

モデル I について、粒子数は  $N = 2000$  と固定され、初期配置は 2 種類 (円型、直線型: 粒子 10 個分の厚みを持つ) が用いられ、粒子は粒子同士が接触しないよう範囲内に配置される。ここで、我々は円型の初期配置で単体、直線型の初期配置で複数の頭部形成に注目し、円型の半径と直線型の長さを  $C_r = \{0.065, 0.17, 0.34\}$ ,  $L_l = \{0.35, 0.85, 1.7\}$  (small, medium, large) のように与えた。

初期配置が円型の場合、粒径の違いによらず単体の頭部が形成されるが、粒径の増加に伴いなだれ後方の粒子が前方に集まりやすくなる。なだれの内部流動を調べるため、粒子速度を  $x, y$  方向そ

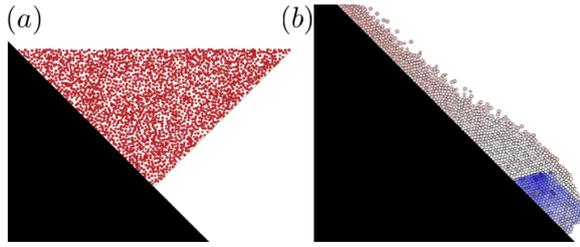


図 7: モデル II (a) 粒子の初期配置 (b) 斜面に沿った方向の粒子速度: なだれ前端の速度に対し、赤が後退、青が前進を表す。

れぞれについて可視化した (図 3)。すると、なだれ内部で粒子が頭部の中心へ向かう  $x$  方向の速度変化、および、頭部の外側へ向かう  $y$  方向の速度増加を確認した。一方、なだれの縁で粒子が頭部の端へ向かう  $x$  方向の速度変化、および、頭部の後方へ向かう  $y$  方向の速度減少を確認した。つまり、なだれ内部で渦対が形成され、渦対の形成は粒径に依存しない。そこで、粒径が頭部形成に与える影響を確認するため、我々は一定時間ごとに頭部の厚さと幅を測定した (図 4)。ここで、頭部の厚さと幅は粒子数が密な部分を基準にしている。そして、測定した値を用いた粒径で規格化すると、厚さと幅に線形の関係が成り立つことがわかった。

次に、初期配置が直線型の場合、なだれ前端が不安定化し複数の頭部が形成された (図 5)。そして、頭部の情報を取得するため、粒子数が密な部分から頭部を特定し、頭部を構成する粒子数と幅を測定した。ただし、各粒径のサンプル数は 10 であり、頭部の平均個数は small:17.6、medium:14.4、large:14.6 であった。まず、頭部を構成する粒子数が増加すると、頭部の幅も増加し、それらの関係は線形となった (図 6(a))。このとき、各粒径で頭部の幅の平均を計算すると、粒子の半径と幅の平均の関係は比例であった (図 6(b))。

モデル II についても、粒子数は  $N = 2000$  と固定され、初期配置は図 7(a) のように三角形を用いた。今回、ポリスチレンのような低密度粒子を用いたため、粒径によらず時間の経過とともに頭部-尾部構造が形成された。また、なだれの進行方向に対する粒子の速度は頭部内部で最大となり、頭部が伸長するため後端が置き去りにされ、尾部が形成されることを確認した。

## 4 まとめと今後の展望

今回、我々は Rotne-Prager テンソルを用い、流体力学的相互作用を現象論的に取り入れた粒子法を構築した。そして、本モデルを用い、2次元平面の斜面上を流れる粉体なだれのパターン形成について調べた。その結果、なだれ内部で渦対が形成され、粒径と頭部の厚さ、幅にスケールリング則が成り立つことを確認した。さらに、低密度粒子を用い実験で確認された頭部-尾部構造を再現した。これらの結果は、実験事実と定性的に対応する。

しかしながら、頭部の平均サイズが何で決定されるか (例えば、システムサイズ、密度、粘性率、傾斜角など)、異なる粒径が混合した場合になだれの前端と後端で粒子サイズが分布するのか、粒子に慣性を導入すること、3次元シミュレーションなどに取り組むべき必要がある。

## 参考文献

- [1] O. Pouliquen, J. Delour, and S. B. Savage, *Nature* **386**, 816 (1997).
- [2] B. Turnbull, and J. N. McElwain, *J. Geophys. Res.* **113**, F01003 (2008).
- [3] Y. Nohguchi, and H. Ozawa, *Phys. D* **238**, 20 (2009).
- [4] Y. Forterre, and O. Pouliquen, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5886 (2001).
- [5] J. N. McElwaine, and K. Nishimura, *Special Publication of the International Association of Sedimentologists* **31**, 135 (2001)
- [6] Y. Nohguchi, *Ann. Glaciol.* **13**, 215 (1989).
- [7] C. Hartel, E. Meiburg, and F. Necker, *J. Fluid Mecha.* **418**, 189 (2000).
- [8] Y. Forterre, and O. Pouliquen, *J. Fluid Mecha.* **467**, 361 (2002).
- [9] J. N. McElwaine, *Philos. Trans. R. Soc. A* **363**, 1603 (2005).