

# 交通流の基本図における SOV モデルのパラメータ推定について

小林浩一, 山崎啓介

東京工業大学大学院 総合理工学研究科 知能システム科学専攻

## 概要

交通流を表すモデルとして SOV モデルが提案されており, パラメータを調節することで密度-流量の関係を示す基本図が再現できることが知られている. モデルのパラメータは個々の車の動きを決定しており, これを推定することで渋滞の現象をより詳細に解析することが可能となる. しかしながら一部の限定された場合を除き, 基本図の情報を用いて SOV モデルのパラメータを推定する研究は十分に行われていない. そこで本研究では基本図から特徴量を抽出し SOV モデルのパラメータを推定する方法を提案する.

## On Parameter Estimation of the SOV Models from the Fundamental Diagrams

Koichi Kobayashi, Keisuke Yamazaki

Department of Computational Intelligence and Systems Science,  
Interdisciplinary Graduate School of Science and Engineering,  
Tokyo Institute of Technology

## Abstract

Stochastic Optimal Velocity (SOV) models have been proposed for expressing the fundamental diagram showing phenomena of traffic jams. Estimation of parameters provides more precise analysis for the principle of traffic jams because the parameters determine behavior of each car. However, the parameter estimation from the diagram has not been studied well except for some cases under specific conditions. The present paper selects features in the diagram and proposes an estimation method for the SOV models.

## 1 はじめに

交通流を表す数理のモデルとして様々なものが提案されている [1]. 車の密度と流量の関係を表現した基本図は渋滞原理の解明に多くの示唆を与えると考えられており, これを如何に忠実に再現できるかがモデルの性能を評価する上で重要な因子となる.

Optimal Velocity(OV) モデル [2, 3] をセルオートマトンにより離散化し, 確率を導入した Stochastic Optimal Velocity(SOV) モデルは実測データにみら

れる相転移現象を再現できるモデルとして注目を集め, これまで盛んに研究が行われてきた [4].

OV モデルや SOV モデルは個々の車の動作をパラメータにより規定しているため, 交通流を測定したデータからパラメータが推定されれば, 渋滞現象における詳細な解析が期待できる. このため個々の車の動きが与えられた状況下でのパラメータ推定などが行われている [5]. しかしながら車の動きが詳細な時系列データとして常に与えられるとは限らない. そこで本研究では基本図が与えられた下での

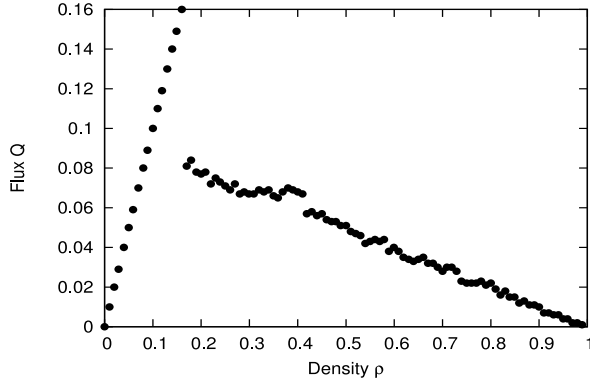


図1: SOVモデルによる基本図. 環状1次元オートマトンのサイト数  $N = 1000$ , 遷移回数  $T = 4000$  とし, 密度  $\rho$  について 0.01 刻みで流量  $Q$  の値をプロットしている. 密度  $\rho = 0.15$  付近において相転移がみられる.

SOVモデルのパラメータ推定を考える. パラメータと基本図との関係は一部の解析的に解かれているモデル [6] を除いてこれまで定性的な議論しかされてこなかった. 本研究では解析可能なモデルを拡張し, より一般的な状況下でパラメータ推定が可能となる特徴量を示す.

## 2 SOVモデルと交通流の基本図

SOVモデルにおいて, ある時刻  $t$  での  $i$  番目の車両の前進確率は最適速度関数  $V(\Delta x)$  を用いて次のように表される.

$$v_i^{t+1} = (1-a)v_i^t + aV(\Delta x_i^t). \quad (1)$$

ここで  $V(\cdot)$  は車間距離  $\Delta x$  に応じて  $V \in [0, 1]$  を返す関数であり, 例えば次式で表されるシグモイド状のものが用いられている.

$$V(\Delta x) = \frac{\tanh(\Delta x - c) + \tanh(c)}{1 + \tanh(c)}. \quad (2)$$

式 (1) は次の時刻  $t+1$  の速度を ASEP[7, 8] モデルと ZRP[9, 10, 11] モデルの混合で決定することを意味している. よって SOV モデルには混合パラメータ  $a$  と最適速度関数が有するパラメータ (上の関数では  $c$ ) が存在する. ある SOV モデルにおける基本図のプロット例を図 1 に示す. ASEP モデルのみでは相転移がみられないが, ZRP モデルを混合することで実測データの基本図に現れるような渋滞状態への相転移が再現されていることがわかる.

## 3 基本図の線形性に基づくパラメータ推定

### 3.1 解析表現の得られたモデル

最適速度関数として次式のステップ関数を考える.

$$V(\Delta x) = \begin{cases} 1 & (\Delta x \geq c) \\ 0 & (\text{others}) \end{cases}. \quad (3)$$

$c = 2$  のステップ関数をもつ SOV モデルでは基本図の解析的な表現が与えられており [6], これを用いることで最大流量を実現する密度  $\rho_h$  と相転移後の減衰する直線からパラメータを推測することが可能である.

本研究ではこの先行研究に倣い  $\rho_h$  と相転移後 (基本図の右側) の直線の傾きから, シグモイド状の最適速度関数をもつモデルのパラメータ推定を行う.

### 3.2 最適速度関数のパラメータ推定

先行研究 [6] のモデルでは, 最大流量を与える密度  $\rho_h$  が流量と比例関係にあり特徴量として重要な意味を持った. 一般の最適速度関数では最大流量が密度に比例しない場合があるため, 流量  $Q$  と比例関係を維持する最大の密度を  $\rho_h$  と再定義する. このとき  $d$  を最適速度関数が 1 となる最小の整数とすると

$$\rho_h = \frac{1}{1+d} \quad (4)$$

となる. 式 (2) は  $\Delta x = \infty$  で  $V = 1$  となるため式 (4) をそのまま用いることはできない. そこで  $V(\Delta x) \geq \theta$  で  $V = 1$  となるように閾値  $\theta$  を設けシグモイド関数を若干変更することで  $\rho_h$  を特徴量として利用可能な最適速度関数を構成する. このような最適速度関数では  $d$  と  $\theta$  が与えられた下で  $c$  のとり得る値が解析的に導出でき,

$$B_\theta(d-1) < c \leq B_\theta(d), \quad (5)$$

$$B_\theta(d) = \frac{1}{2} \left\{ \ln \left( 1 + \frac{\tanh(d) - \theta}{(1-\theta)\tanh(d)} \right) - \ln \left( 1 - \frac{\tanh(d) - \theta}{(1-\theta)\tanh(d)} \right) \right\} \quad (6)$$

となる. これにより基本図から読み取った  $\rho_h$  から  $c$  の範囲が推定できる. 本研究では  $\theta = 0.98$  とする.

### 3.3 混合パラメータの推定

先行研究 [6] に倣い, 基本図の特徴量として  $\rho \geq \rho_h$  における直線の傾きに注目し, 前述の  $c$  と併せて  $a$

の推定を行う。しかしながら、パラメータによっては、基本図がZRPのような上に凸の曲線となり相転移が出現しない場合や相転移後の基本図が直線に従わない場合がある。これらの場合には傾きを特徴量として用いることが困難なため、予め推定可能なパラメータ領域を次の要領で限定する。

基本図の点を  $(\rho_i, Q_i)$  とし以下のようにデータセット  $D$  を定義する。始点  $(i = 0)$  を  $(\rho_0, Q_0) = (\rho_h, \rho_h)$  とし、それより右の点を順番に  $i = 1, 2, \dots, n$  とする。パラメータによって直線に従うが  $\rho < 1$  で流量が零に達し、その後の流量が横ばいとなる基本図が現れる。こうした直線の傾きを求めるため、流量  $Q_i$  が零付近になった場合、それ以降の点は  $D$  として採用しない。

まず  $D$  における相転移の有無を次式から判定する。

$$f_c = \sum_{i=0}^n \exp \left\{ - \frac{(Q_i - Q_0)^2}{2\sigma_c^2} \right\}. \quad (7)$$

相転移が無く  $\rho_h$  付近で基本図が連続になる場合は  $f_c$  の値が大きいため、 $f_c$  がある閾値以下の場合に相転移が存在すると判定する。

次に統計的モデル選択規準 BIC[12] を用いて  $D$  の点が直線で近似可能かを判定する。 $D$  の尤度を

$$L = \prod_{i=0}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_L^2}} \exp \left\{ - \frac{(Q_i - f(\rho_i|\omega))^2}{2\sigma_L^2} \right\} \quad (8)$$

と定義する。ここで  $f(\rho|\omega)$  は密度と流量の関係式であり多項式  $\omega_0 + \sum_{i=1}^K \omega_i \rho^i$  とする。多項式のパラメータは  $\omega = \{\omega_0, \dots, \omega_K\}$  である。本研究では一次関数 ( $K = 1$ ) と三次関数 ( $K = 3$ ) の2つの場合を考慮し、BIC スコア

$$\text{BIC} = \ln L - \frac{\dim \omega}{2} \ln n \quad (9)$$

の高い方を選択する。

相転移が存在すると判定され、かつ相転移後の最適関数として一次関数が選択されたパラメータ領域と、領域内の傾きの値を図2に示す。与えられた基本図において  $D$  に相転移が存在し一次関数とみなせれば、図2を参照することで傾きの値から  $(a, c)$  の組を推定できる。

### 3.4 パラメータ推定の例

図1はパラメータ  $(a, c) = (0.06, 2.5)$  をもつモデルより生成された基本図である。本章では例としてこの基本図から実際にパラメータを推定する。

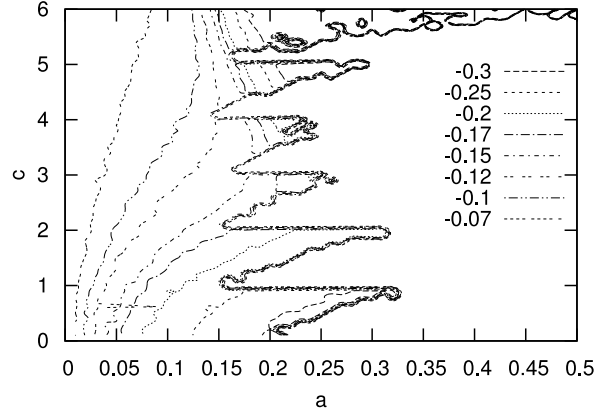


図2: 推定可能なパラメータ領域と傾きの等高線。太線の左側がパラメータ推定が可能な領域となる。傾きは左に行くにつれ零に近くなる。

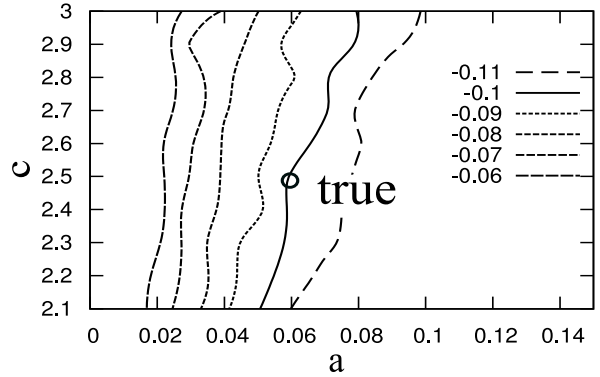


図3:  $d = 5$  を満たす  $c$  の付近でのパラメータに対する基本図の傾き。真のパラメータの座標は 'true' で示される点である。

基本図から容易に  $\rho_h \simeq 0.16$  であることが確認でき、関係式 (4) より  $d = 5$  と判定できる。式 (5) から、おおよそ  $2.046 < c \leq 3.053$  と推定できる。図2のこの付近を拡大したのが図3である。基本図から傾きを求めると  $-0.99937$  となり、その等高線は真のパラメータを表す点の非常に近くを通る。また混合パラメータはおおよそ  $0.05 \leq a \leq 0.08$  の範囲に存在することもわかる。以上より提案手法によって真のパラメータに非常に近い曲線の領域が推定された。

## 4 考察とまとめ

最初にパラメータ推定の特定不能性について考察を行う。本研究では特徴量  $\rho_h$  によりパラメータ  $c$  を推定する方法を考案したが、シグモイド状の最適速

度関数では一意に特定することが不可能である。このため線形性を利用した  $a$  の推定においても点で推定することはできず、区間の推定となる。これは OV モデルが連続の車間距離を扱うのに対し、SOV モデルではオートマTONでそれを扱うため最適速度関数の定義域が離散化されていることが原因である。 $d$  (最適速度関数が 1 をとる最小の車間距離  $\Delta x$ ) が  $\rho_h$  を定めておりパラメータ  $c$  が多少変化してもこの  $d$  は変化しない。つまり  $c$  の推定結果が区間として得られることはモデルを解釈する上で支障がないと考えられる。しかしながら混合パラメータ  $a$  は ASEP モデルと ZRP モデルのバランスを表現しておりより正確な推定が必要になる可能性がある。その場合は流量が原点以外で零となる密度など、別の特徴量を用いて  $a$  を推定する方法が考えられる。推定方法の精緻化は今後の重要な課題である。

次に傾きの値の精度について考察する。図 2 の描画の際は所望の定常状態に早く近づくよう、初期状態は等間隔として車を配置している。今回の基本図は 1 つの密度に対し、遷移を繰り返した結果の流量を 1 つプロットしてある。遷移は確率的に行われるため基本図の形状は乱数系列に依存する。図 2 において等高線がなめらかでないのは、このような確率的なぶれが原因と考えられる。よって、乱数系列の数やサイト数を増やすことで精度の改善が期待できる。実際、サイト数を 500 から 2000 まで変化させることで傾きの図がなめらかになっていくことが確認できた。

推定に用いた特徴量について考察する。本研究は先行研究 [6] を参考にし、 $\rho_h$  と相転移後の直線の傾きの 2 つを特徴量として用いた。このため先行研究で扱ったステップ関数を最適速度関数に用いるモデルにおいて解析表現が得られていない  $c > 2$  の場合でも同様の推定が可能であると思われる。また、より一般的な最適速度関数をもつモデルでは推定するパラメータが 3 個以上になる可能性があるため特徴量を付加する必要があるが、本研究で挙げた 2 つの特徴量はその場合でも有用であると考えられる。今回は線形性に着目した推定法のため非線形な基本図は対象外としたが、非線形部分には  $\omega$  などの多くの特徴量が存在する。その中からパラメータ推定に有用であるものを見出すことは実測データから得られた多様な基本図を解析する上で重要である。

最後にまとめを述べる。シグモイド状の最適速度関数を有する SOV モデルにおいて、基本図の線形性

に基づく特徴量を用いてパラメータの区間を推定することに成功した。モデルから基本図を近似する課題を順問題とすると、本研究が行ったのは基本図からモデルを近似する逆問題である。渋滞原理の詳細な分析のためには逆問題への取り組みが不可欠であると思われる。本研究は最も単純な逆問題においてデータ解析の手法を用いるアプローチを示した。

謝辞 本研究の一部は科学研究費 23500172 の助成を受けた。

## 参考文献

- [1] D. Chowdhury, L. Santen, A. Schadschneider, Phys. Reports. **329** 199-329 (2000)
- [2] M. Bando, K. Hasebe, K. Nakanishi, A. Nakayama, A. Shibata and Y. Sugiyama, J. Phys. I France **5** 1389 (1995)
- [3] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata and Y. Sugiyama, Phys. Rev. E **51** 1035 (1995)
- [4] M. Kanai, K. Nishinari and T. Tokihiro, Phys. Rev. E **72** 035102 (2005)
- [5] 柴田 章博, 交通流のシミュレーションシンポジウム講演概要集 **13** 11 (2007)
- [6] M. Kanai, K. Nishinari and T. Tokihiro, J. Phys. A: Math. Gen. **39** 2921 (2006)
- [7] B. Derrida, M. R. Evans, V. Hakim, and V. Pasquier, J. Phys. **A26**, 1493 (1993)
- [8] M. Kanai, K. Nishinari, T. Tokihiro, J. Phys. Math. Gen. **39** 9071 (2006)
- [9] M. R. Evans, Braz. J. Phys. **30** 42 (2000)
- [10] M. R. Evans and T. Hanney J. Phys. A: Math. Gen. **38** R195 (2005)
- [11] M. Kanai, J. Phys. Math. Theor. **40** 7127 (2007)
- [12] G. E. Schwarz, Annals of Statistics **6** (2): 461 (1978)