

2次元OV模型に見られる凝集挙動の解析

石渡龍輔^{1,2}

¹ 東京医科歯科大学 医歯学総合研究科 情報生物学専攻

² 名古屋大学 情報科学研究科 複雑系科学専攻

概要

2次元OV模型の粒子集団は、凝集と拡散を繰り返す大域的挙動を取る。大域挙動を繰り返している粒子集団は、円周上に一様に配置されているように見える。凝集挙動における配置の均等性を解析するため、我々は凝集挙動が見られる最小の粒子数3に着目し、慣性項を無視した3体の2次元OV方程式の解を求め、その安定性を解析した。

Analysis of aggregation behavior of 2D-OV model

Ryōsuke Ishiwata^{1,2}

¹ Department of Information Biology, Graduate School of Medicine and Dentistry,
Tokyo Medical and Dental University

² Department of Complex Systems Science, Graduate School of Information Science,
Nagoya University,

Abstract

A collective motion of particles of the two-dimensional OV model is periodic behavior which alternate between between the aggregation and spread behavior. We take the system consisting of three particles for studying the homogeneity of the distribution of aggregation particles. We solve differential equations of motion without the momentum term, and we evaluate the stability of the obtained special solution using linear analysis.

1 はじめに

生物の細胞内輸送, 生物の集団形成, 交通流などは, 非常に興味深い現象であり, 物理的な方法論を用いた研究が行われている [1]. 鳥や魚の群れなどの集団運動は, 生物学における興味深い問題であると同時に, Swarm Optimization のような工学への応用も考えられており, 既に幾つかのモデルを用いたダイナミクスの研究が行われている [2].

鳥や人間の集団が見せる特徴的な大域構造の1つは, 特定の点の周りに粒子が集まった状態となる凝集構造である. この凝集構造は, 近年注目が集まっている, アメーバ様細胞の集団の大域構造としても報告がされている [3]. 本研究は, 集団の凝集挙動の一

般的な性質を解明することを最終目的とし, 解明の手始めとして, 集団運動の一般的な模型である2次元OV模型の凝集挙動の性質を明らかとすることを目的とした.

2次元OV模型は, 大きく分けて2つの種類が存在する. 1つは近接する粒子との相互作用だけを含んだ模型であり, 迷路の解を表す挙動や特定の構造に粒子が配置されたまま集団が運動する挙動などを示すことが知られている [4, 5, 6]. もう1つが, 本研究の着目する, 全粒子との相互作用を考えた模型であり, この模型の粒子集団は, 凝集挙動を取ることが知られている. 2次元OV模型の凝集挙動は, 円周上に一様に分布した粒子が動的に凝集と拡散を繰り返すような挙動である. (図1と図2のような状態が

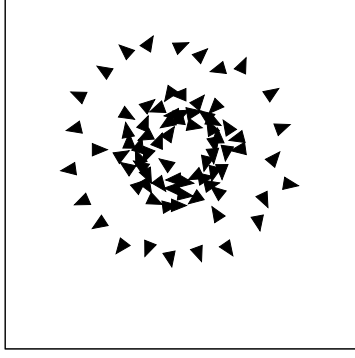


図 1: 粒子集団が拡散状態にあるときの粒子の配置図.

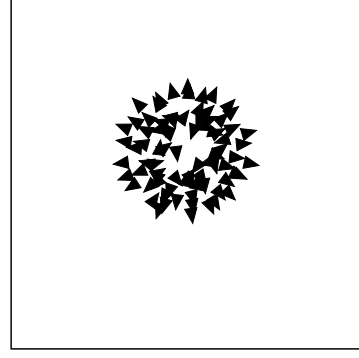


図 2: 粒子集団が凝集状態にあるときの粒子の配置図.

繰り返される挙動.) このように一様に分布しているように見える凝集構造が, どのような機序で現れるのかを知ることが, 本研究の最終目的である. しかし, この安定性を直接求めることは難しいと考えられる. そこで, 本研究では, 数を増やすことで多粒子の場合においても同様に用いることができる一様分布の解析手法を見だし, 特解を簡単に求めることができる 3 体の場合に手法を適用する. 最少数の系である 3 体の解析が適切に行えることは, 4 体以上の系に本解析手法を用いるための必要条件である.

2 2次元 OV 模型

2次元 OV 模型の運動方程式は,

$$\ddot{\vec{x}}_j(t) = a \left[\left\{ \sum_k \vec{F}(\vec{r}_{kj}(t)) \right\} - \dot{\vec{x}}_j(t) \right], \quad (1)$$

$$\vec{F}(\vec{r}_{kj}) = f(r_{kj})(1 + \cos \theta_{kj}) \vec{n}_{kj}, \quad (2)$$

$$f(r_{kj}) = \alpha [\tanh \beta(r_{kj} - b) + c], \quad (3)$$

で与えられ, \vec{x}_j は j 番目の粒子の位置を表わし, $\vec{r}_{kj} = \vec{x}_k - \vec{x}_j$ は変位ベクトル, $\vec{n}_{kj} = \vec{r}_{kj}/r_{kj}$ は変位の単位ベクトル, $r_{kj} = |\vec{r}_{kj}|$ は変位, θ_{kj} は j 番目の粒子の進行方向と k 番目の粒子の位置がなす角度である. a は, 感応度を表し, c は斥力と引力の割合を表しており, $c = 1.0$ で全領域が引力, $c = -1.0$ で全領域が斥力となる [5]. 角度 θ_{kj} は, あらわに書くと $\theta_{kj} = \arctan \frac{y_k - y_j}{x_k - x_j} - \arctan \frac{y_j}{x_j}$ となる.

この方程式は直接解くことが難しいため, その特解を求めるため, 質量の逆数に対応する感応度 a が十分大きいものとし, 慣性項を落とした方程式,

$$\dot{\vec{x}}_j(t) = \sum_k \vec{F}(\vec{r}_{kj}(t)), \quad (4)$$

を考える. ただし, この仮定のもとでは, 粒子集団が凝集と拡散を繰り返すことはなくなるため, この条件のもとで解析できることは, 一様に分布するという性質だけである. 特解を求めることは $c \neq 0.0$ では容易ではなくなるため, ここでは $c = 0.0$ を仮定する.

3 特解

ここでは, 方程式 (4) の特解を与える. まず, 一様分布をした解を表す特解を与えたいため, 均等に分布した状態を仮定し, その解を求めることとした. 均等な配置とは, 3 粒子においては正三角形であるため, 重心を原点とする図 3 のような座標系を考えると, 粒子 1 の方程式が

$$\frac{dx_1}{dt} = f(r_{21})(1 + \cos \theta_{21}) \cos \theta_{21} + f(r_{31})(1 + \cos \theta_{31}) \cos \theta_{31}, \quad (5)$$

$$\frac{dy_1}{dt} = f(r_{21})(1 + \cos \theta_{21}) \sin \theta_{21} + f(r_{31})(1 + \cos \theta_{31}) \sin \theta_{31}, \quad (6)$$

となる. 対称性を持つ配置を仮定してあるため $r_{21} = r_{31}$ であり, $f(r_{21})(1 + \cos \theta_{21}) = f(r_{31})(1 + \cos \theta_{31})$, $\cos \theta_{21} = \cos \theta_{31}$ と $\sin \theta_{21} = -\sin \theta_{31}$ が成り立つ.

まず粒子が外を向いている場合 (図 3 の黒塗りの三角形の配置), $\theta_{21} = -\theta_{31} = \frac{5}{6}\pi$ と $r_{21} = r_{31} = \sqrt{3}x_1$ を満たすため, 2次元 OV 模型は 1 体の模型に帰着され, その方程式は,

$$\frac{dx_1}{dt} = 2\alpha f(\sqrt{3}x_1(t)) \left(1 + \cos \frac{5}{6}\pi \right) \cos \frac{5}{6}\pi = -2\alpha' \tanh \beta(\sqrt{3}x_1 - d), \quad (7)$$

$$\frac{dy_1}{dt} = 0, \quad (8)$$

と与えられる. ただし $\alpha' > 0$ として設定してある. 同様に, 内向きに設定した場合 (図 3 の白抜きの三角形の配置), $\theta_{21} = -\theta_{31} = -\frac{1}{6}\pi$ であり, 方程式は,

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= 2\alpha f(\sqrt{3}x_1(t)) \left(1 + \cos\left(-\frac{1}{6}\pi\right)\right) \cos\left(-\frac{1}{6}\pi\right) \\ &= -2\alpha'' \tanh\beta(\sqrt{3}x_1 - d), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\frac{dy_1}{dt} = 0, \quad (10)$$

このとき方程式 (7) と (9) の解は,

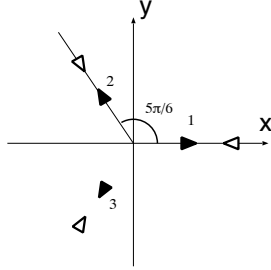


図 3: 正三角形の頂点に均等に配置された粒子の配置図. 黒塗りの三角は, 重心から外向きに運動する解を表しており, 白抜きの三角は重心に向かって運動する粒子の解を表している.

$$x_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}}[-\operatorname{arcsinh}(C_0 e^{-\sqrt{3}\alpha' t}) + d], & (x_1 < \frac{d}{\sqrt{3}}) \\ \frac{1}{\sqrt{3}}[\operatorname{arcsinh}(C_0 e^{-\sqrt{3}\alpha'' t}) + d], & (x_1 > \frac{d}{\sqrt{3}}) \end{cases} \quad (11)$$

と求まる. 次に, 求められた特解の安定性を, 線形安定性解析を用いて評価する.

4 線形化解析

線形安定性解析は, 中山達による最近接相互作用の場合の解析方法を元に行った [5]. 正三角形の頂点に配置された粒子の軌道に x 方向と y 方向の微小な摂動を同時に入れると, 線形安定性解析が複雑になるため, 本研究では x 方向だけの摂動と y 方向だけの摂動をそれぞれ考えて, 解析を行った. また, 摂動の影響を全ての粒子に対して考慮し, 完全なダイナミクスを解析することは難しいため, 本解析では, 摂動を与えられた場合でも, 粒子 2 と粒子 3 の振る舞いは前節で得られた特解で与えられると仮定し, 粒子 1 に加えられた摂動の時間発展が, 0 に収束する振る舞いであるかどうかを解析した. 方程式 (4) に摂動を加えた解を代入し, 特解 x_1 の周りで ϵ_1 の 1 次ま

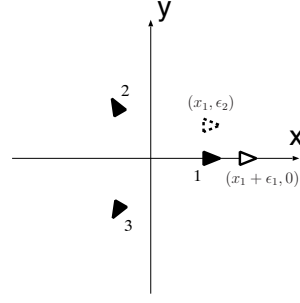


図 4: D_3 対称な解に, x 方向の摂動を加えものが白抜きの三角で表されており, y 方向に摂動を加えたものが点線の三角で表されている.

で展開すると, 線形化された $\epsilon_1(t)$ に関する方程式,

$$\begin{aligned} \frac{d\epsilon_1(t)}{dt} &= \frac{\partial F_x(\bar{X}_{21}(t), \bar{Y}_{21}(t))}{\partial \bar{X}_{21}(t)} \frac{\partial(\bar{x}_2(t) - \bar{x}_1(t))}{\partial \bar{x}_1(t)} \Big|_{\alpha} \epsilon_1(t) \\ &+ \frac{\partial F_x(\bar{X}_{31}(t), \bar{Y}_{31}(t))}{\partial \bar{X}_{31}(t)} \frac{\partial(\bar{x}_3(t) - \bar{x}_1(t))}{\partial \bar{x}_1(t)} \Big|_{\alpha} \epsilon_1(t), \\ 0 &= \frac{\partial F_y(\bar{X}_{21}(t), \bar{Y}_{21}(t))}{\partial \bar{X}_{21}(t)} \frac{\partial(\bar{x}_2(t) - \bar{x}_1(t))}{\partial \bar{x}_1(t)} \Big|_{\alpha} \epsilon_1(t) \\ &+ \frac{\partial F_y(\bar{X}_{31}(t), \bar{Y}_{31}(t))}{\partial \bar{X}_{31}(t)} \frac{\partial(\bar{x}_3(t) - \bar{x}_1(t))}{\partial \bar{x}_1(t)} \Big|_{\alpha} \epsilon_1(t), \end{aligned}$$

が得られる, 但し $\bar{X}_{21} = \bar{x}_2(t) - \bar{x}_1(t)$, $\bar{Y}_{21} = \bar{y}_2(t) - \bar{y}_1(t)$, $\bar{X}_{31} = \bar{x}_3(t) - \bar{x}_1(t)$, $\bar{Y}_{31} = \bar{y}_3(t) - \bar{y}_1(t)$ であり, α は $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3)$ に特解を代入することを表している¹. また, 特解が (4) を満たすことを用いた. 中山達の先行研究によつて, $\frac{\partial F_x(\bar{X}_{21}(t), \bar{Y}_{21}(t))}{\partial \bar{X}_{21}(t)} \Big|_{\alpha} = \frac{\partial F_x(\bar{X}_{31}(t), \bar{Y}_{31}(t))}{\partial \bar{X}_{31}(t)} \Big|_{\alpha}$ であり $\frac{\partial F_y(\bar{X}_{21}(t), \bar{Y}_{21}(t))}{\partial \bar{X}_{21}(t)} \Big|_{\alpha} = -\frac{\partial F_y(\bar{X}_{31}(t), \bar{Y}_{31}(t))}{\partial \bar{X}_{31}(t)} \Big|_{\alpha}$ であることが分かっているため, y 方向の式は $0 = 0$ の恒等式となり $\epsilon_1(t)$ の条件を与えない [5]. よつて, 摂動に関する線形化された式が

$$\frac{d\epsilon_1}{dt} = -2A(x_1)\epsilon_1, \quad (12)$$

と求められる, ただし $A(x_1) = \frac{\partial F_x(\bar{X}_{21}(t), \bar{Y}_{21}(t))}{\partial \bar{X}_{21}(t)} \Big|_{\alpha}$ である². 安定性は, 式 (12) の右辺の係数の符号に依存しており, 右辺が正であれば, 摂動 ϵ_1 が大きくなるため求められた解 (11) は安定でない. 逆に右辺が負である場合, ϵ_1 は収束することになり, 求められた解は安定である. $-A(x_1)$ は, 常に負であるため (図 5), x 方向の摂動に対して, 解 (11) は安定である.

¹ α は, $(\bar{x}_1(t) = x_1(t), \bar{x}_2(t) = -\frac{1}{2}x_1(t), \bar{x}_3(t) = -\frac{1}{2}x_1(t), \bar{y}_1(t) = 0, \bar{y}_2(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}x_1(t), \bar{y}_3(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}x_1(t))$ である.

² A の引数を x_1 としているのは, 特解の空間的な対称性により $x_1(t)$ と $x_1(t)$ の定数倍で α の条件が表せるからである.

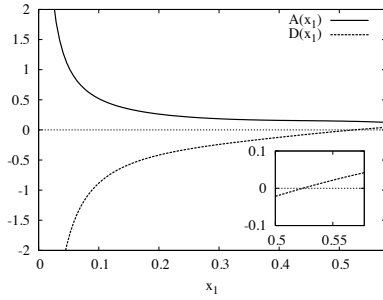


図 5: 粒子が重心から離れるように運動している場合のグラフ。横軸は x_1 であり、曲線は、 $A(x_1)$ を表し、点線が $D(x_1)$ を表している。

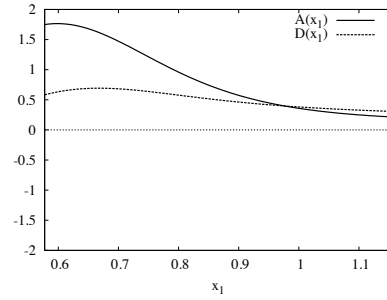


図 6: 粒子が重心に近づく運動をしている場合のグラフ。横軸は x_1 であり、曲線は、 $A(x_1)$ を表し、点線が $D(x_1)$ を表している。

4.1 y 方向の摂動

次に y 方向だけに摂動 $\epsilon_2(t)$ を入れた場合、 x 方向の摂動と同様の方法を用いることで、 ϵ_2 の方程式は、

$$\frac{d\epsilon_2}{dt} = -2D(x_1)\epsilon_2, \quad (13)$$

と与えられる、ただし、 $D(x_1) = \left. \frac{\partial F_y(\bar{X}_{21}(t), \bar{Y}_{21}(t))}{\partial Y_{21}(t)} \right|_x$ このとき解 (11) の安定性は、 x 方向の摂動 ϵ_1 を入れた場合と同様に、 $-D(x_1)$ の符号によって決定される。平衡点から遠い x_1 のとき、 $D(x_1)$ は、負であるため解 (11) は、特定の距離の間では y 方向の摂動に対して安定ではないことが分かる (図 5)。しかし、十分 x_1 が平衡点に近づくと、 $D(x_1)$ は正となり、解 (11) に漸近することが図 5 より分かる。

これに対し、内向きの解に摂動を入れる場合、 x と y どちらの方向の摂動に対しても解 (11) は安定であることが、図 6 から確認できる。

5 まとめと考察

本研究においては、凝集挙動において見られる一様分布の安定性を解析するため、3体の系において特解を求め、その解の安定性解析を行った。得られた3体の一様分布の安定性は、摂動の方向によって異なっており、正三角形の重心方向への摂動に対して常に安定であり、重心方向に垂直な方向への摂動に対しては外向きの特解において不安定な領域が表れた。この事実は、数値シミュレーションを行うことで、 y 方向への摂動は、解が平衡点に十分近づいてから 0 に収束することが確認されるため、線形安定性解析の結果は妥当であったと考えられる。本研究により3体の系における、粒子間距離と均等な分布の安定領域の関係が、決定できた。本解析によって、 x 方向と y 方向の摂動それぞれに対して、粒子は、 $x_1 \approx \frac{d}{\sqrt{3}}$

において特解を安定解にもつことが分かった。しかし、中山達による先行研究によって、 x と y 方向の2つの摂動が同時に入れられた場合、新たに条件が付け加えられることが示されているため、これを確認することは必要である [5]。

本解析手法の3体における妥当性は確認されたため、粒子数が3より多い場合の一様分布の安定性も本手法を用いて解析することを考えている。既に一般の n 体の線形解析は導出してあるため、多粒子系への適用を考えた場合、 n 体の場合の平衡点の位置を導出することが今後の課題である。また、2次元OVモデルは、引斥度合 c に強く依存して様々な振る舞いを見せる。したがって、引斥度合いを考慮することは、凝集状態の解析においても重要であると考えられるため、解析手法を $c = [-1.0, 1.0]$ に拡張する必要がある。これらの拡張を行えば、粒子数 n と引斥度 c 毎に、距離に対する安定性が決定できるため、粒子間距離と一様分布の安定領域の相図が、描けることになる。加えて、本研究で行った解析は、 $a \gg 0$ の場合を仮定したものであり、解析手法が、どの範囲の a において妥当であるかは確認する必要がある。

参考文献

- [1] N. Waldau, P. Gattermann, H. Knoflachner, M. Schreckenberg, *Pedestrian and Evacuation Dynamics 2005* (2007).
- [2] N. Sannomiya and K. Matuda, *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.*14, 157 (1984).
- [3] T. Gregor, K. Fujimoto, N. Masaki, S. Sawai, *Science*, vol. 328 (2010)
- [4] A. Nakayama, K. Hasebe, and Y. Sugiyama, *Phys. Rev. E* 71, 036121 (2005).
- [5] A. Nakayama, K. Hasebe, and Y. Sugiyama, *Phys. Rev. E* 77, 016105 (2008).
- [6] 衣川亮太, 大島吉雄, ポスター発表 P11, 第 15 回創発システム・シンポジウム