OV モデルの伝達特性

藤兼典史 [1,2], 菊池誠 [2,1,3]

[1] 大阪大学大学院 理学研究科
[2] 大阪大学 サイバーメディアセンター 大規模計算科学研究部門
[3] 大阪大学大学院 生命機能研究科

概要

周囲の状況に対して慣性を持って自己調整する素子のプロトタイプとして、Optimal Velocity Model(OV モデル) を考え、そのダイナミクスの解析を行った．OV モデルを拡張した素子を直線上にならべ、一端の素子に周期的な外力を加える．そして、その入力がどのように伝わるかを調べた．素子と入力のパラメータによって、伝わり方に違いがあった．一定振幅で遠くまで伝わる相（周期的な相)、振動が遠くまで伝わらない相（減衰する相)、遠くまで伝わるが振幅が奇妙に振る舞う相（奇妙な相）の３つがあった．

Transmission Characteristics of the OV Model

Norifumi Fujikane[1,2], Macoto Kikuchi [2,1,3]

[1] Graduate School of Science, Osaka University
[2] Large-scale Computational Science Division, Cybermedia Center, Osaka University
[3] Graduate School of Frontier Biosciences, Osaka University

Abstract

We study a complex dynamical behavior of 1-dimensionaly-coupled interacting elements expressed by a variation of the optimal velocity model. We arrange the elements in a chain and analyze transmission characteristics of a periodic motion in the case that the first element is subjected to a periodic driving. We found three phases according to the parameters. In the first phase (the periodic phase), the periodic motion propagates along the chain infinitely. The second one (the dumping phase) is that the periodic motion is damped off at a finite distance. The third one (the strange phase) is that the elements vibrate strangely at a long distance.

1 はじめに

複雑な化学反応サイクルなどを記述する方程式系は、化学反応物質の濃度などを変数とした多数の自由度を持つ系である．それらの方程式は各変数の一階の微分方程式で表現されることが多い．しかし、どれか一つの変数に注目して、他の変数を (近似的にでも) すれば、それらの方程式は、一つの高階の微分方程式に帰着させせられるはずである．本研究では、細胞が並んだ系など同じ化学反応サイクルが結合したシステムを念頭に置いて、その相互作用の効果を考える．各化学反応サイクルからは、反応生成物であるひとつの物質が他のサイクルに供給され、それによって、信号の伝達が行われるものとする．そこで、サイクル間で伝達される物質の濃度に相当する変数一つだけに注目し、各サイクルは高階の微分で表される抽象的な素子とみなすことにする．そして、それらの素子が結合している系がどのような振る舞いを示すかを理解したい．

本研究では、高階の方程式として、二階微分方程

式系である Optimal Velocity Model （OV モデル）[1] を取り扱う．OV モデルは、交通流の分野で提案され、さまざま解析や拡張が行われてきた．OV モデルでは、前の車との車間によって、最適な速度を返す OV 関数を設定し、各車が最適速度よりも速ければ減速し、遅ければ加速するように、加速度を調整する。このモデルの優れている点は、渋滞と自由流の両方をひとつのモデルで記述できるところである．二階微分で表される慣性の効果によって、最適速度への接近に遅れが生じ、車両密度が高いときはそれが渋滞の形成につながる．

我々は、ひとつの素子内でなんらかの物質の濃度などが高くなると、それに結合している素子内の物質の濃度が、遅れ (慣性の効果) を伴って、高まっていくような場合を想定する．そこで、交通流では衝突や追い抜きといった事象は適当ではないが、本研究のモデルでは交通流でいえば追い抜き、逆走に相当する変化も可能とする．このように OV モデルを拡張したものがひとつの素子を表すものとし、その素子を直線上に多数並べたシステムを考える。本件級では、外力として一端に周期的な振動を加え、そして、外力を加えた端から離れた場所にある素子の動きを調べた．

2　モデル

本研究で扱うモデルを具体的に説明をする．i 番目の素子の変数を x_i として、各素子は以下の方程式に従うものとする．

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = a\left(f(\Delta x_i) - \frac{dx_i}{dt}\right) \tag{1}$$

ここで、$\Delta x_i = x_{i-1} - x_i$ である．a は sensitivity と言われるパラメータである．本研究では、$a = 1$ とした．

$f(\Delta x_i)$ は、OV 関数である．OV 関数は、最高速度を調整するパラメータを α として、以下のように定義する．

$$f(\Delta x_i) = \sigma\alpha\frac{\tanh(|\Delta x_i| - 2) + \tanh(2)}{1 + \tanh(2)} \tag{2}$$

$$\sigma = \begin{cases} +1 & (\Delta x_i \geq 0 \text{ のとき}) \\ -1 & (\Delta x_i < 0 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{3}$$

この関数の概形を図 1 に示す．交通流のモデルと違い、Δx が負の領域では x_i が負の方向へついていくようになっている．

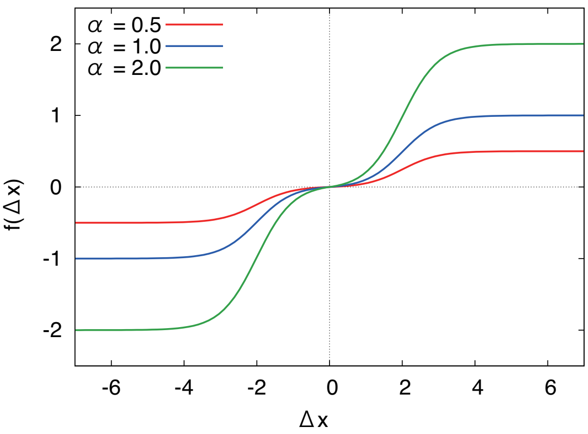

図 1: OV 関数.

このモデルの第 0 番目の素子に外力として周期的な振動を加える．つまり、角振動数 ω と振幅 A によって、第 0 番目の素子の運動が

$$x_0(t) = A(1 - \cos(\omega t)). \tag{4}$$

と表されるとする．このモデルについて、数値シミュレーションを行った．初期条件は、すべての $i (\geq 0)$ に対して

$$x_i(0) = 0, \frac{dx_i}{dt} = 0$$

とし、計算手法として 4 次のルンゲ=クッタ法を用いた．

3　結果

前節で述べたモデルには、3 つパラメータ α, A, ω がある．これらのパラメータの違いによって、入力の伝わり方に以下の 3 つの相が見出された．

1. 減衰する相：入力の振動が素子を伝わっていくにつれて減衰し、遠方[1]まで伝わらない．
2. 周期的な相：振動が伝わっていくと、入力とは異なるある一定の振幅になり、そのまま遠方に伝わっていく．遠方での振動数は入力の振動数と同じである．
3. 奇妙な相：振動は遠方まで伝わるが、周期的な相とは違い、振幅が一定に落ち着かない．遠方の素子は、入力の振動数よりも小さな振動数で振動する．

次に、これら 3 つの相の特徴を説明する．

[1]素子の index が大きいという意

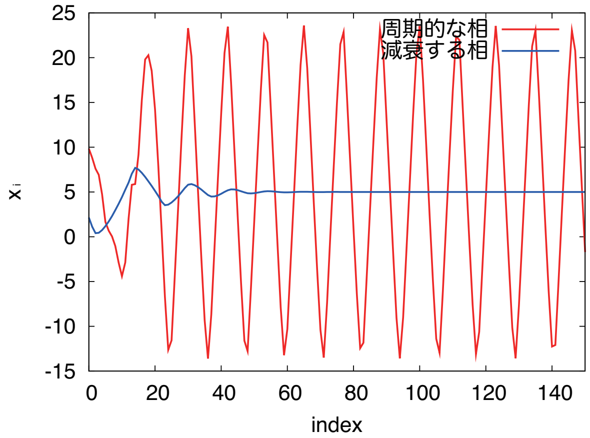

図 2: 減衰相と周期的な相．$t = 10000$ でのスナップショット．パラメータは、共に $A = 5, \alpha = 4$ で、減衰する相では $\omega = 0.1$、周期的な相では、$\omega = 0.3$.

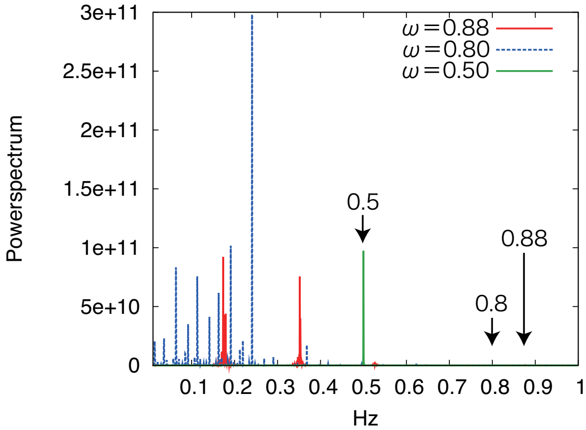

図 4: $i = 999$ の素子のパワースペクトル．$A = 5, \alpha = 3$ で、$\omega = 0.80, 0.88$ は奇妙な相、$\omega = 0.5$ は周期的な相のパラメータである．$t = 5000$ まではトランジェントとし、$t = 5000$ から $t = 15000$ までの振幅の変化により計算した．

3.1　３つの相

減衰する相では、振幅が遠くまで伝わらない．遠方の素子は、入力の平均値に留まり、直流を出力する．図 2（青線）は、典型的な減衰相のパラメータのときの十分時間が経ったあとでのスナップショットである．およそ第５０番目以降の素子はほとんど振動していない．振動しない素子は、入力の平均値である $x = 5$ に留まる．次に、周期的な相の例が図 2（赤線）である．外力を加えた端から離れた素子まで、一定振幅のまま遠くまで伝わっている．遠方での振動数は入力の振動数 ω と一致するが、振幅は A とは必ずしも一致しない．入力の振動数が大きなると遠方での振幅は小さくなる傾向がある．

奇妙な相では、入力の振動は伝わるが、振幅が奇妙な振る舞いを示す．外力を加える端に近い素子は周期的な相での運動に似た振る舞いを示すのに対して、ある程度遠くの素子では振幅が一定でなく、変化する．図 3 は、奇妙な相のパラメータにおける遠方にある $i = 999$ の素子の振幅変化である．一見すると、振幅は不規則に変化しているようである．しかし、実際には、振幅は非常に長い周期で変化していることがわかる．図 3 の例では、周期 $T = 10000$ 程度の超長周期が見られる．

3.2　パワースペクトル

次に、周期的な相と奇妙な相における遠方の素子の動きを把握するために、フーリエ解析を行った．図 4 は、$i = 999$ の素子のパワースペクトルである．周期的な相では、入力と同じ振動数 (0.5Hz) のところにパワースペクトルのピークが立っている．一方、奇妙な相では、入力の振動数 (0.8Hz,0.88Hz) は消え、超長周期の出現に対応する低い振動数のところにピークが移っている．

3.3　相図

図 5 は、$A = 5$ のときの相図である．パラメータ α が小さいところでは、振動は遠方には伝わらない．

それに対し、入力の振動数 ω は、大きすぎても小さすぎても振動は遠方に伝わらないことがわかる．この理由は、以下のように理解できる．振動数が十分大きいと、i 番目の素子が加速しきる前に、$i-1$ 番目の素子が逆方向へ動きだす．i 番目の速度は小さいので、$i-1$ 番目の素子が逆方向へ動き出したところまで到達することができず、その結果、i 番目の素子の振幅は、$i-1$ 番目の素子の振幅よりも小さくなる．反対に、振動数が十分小さいと、i 番目の素子は、Δx_i を小さくたもったまま、$i-1$ 番目の素子についていくことができる．この場合、i 番目の素子の速度は小さく、i 番目の素子が逆方向へ動き出したところまで到達することができない．よって、i 番目の素子の振幅は、$i-1$ 番目の素子の振幅よりも小さくなる．

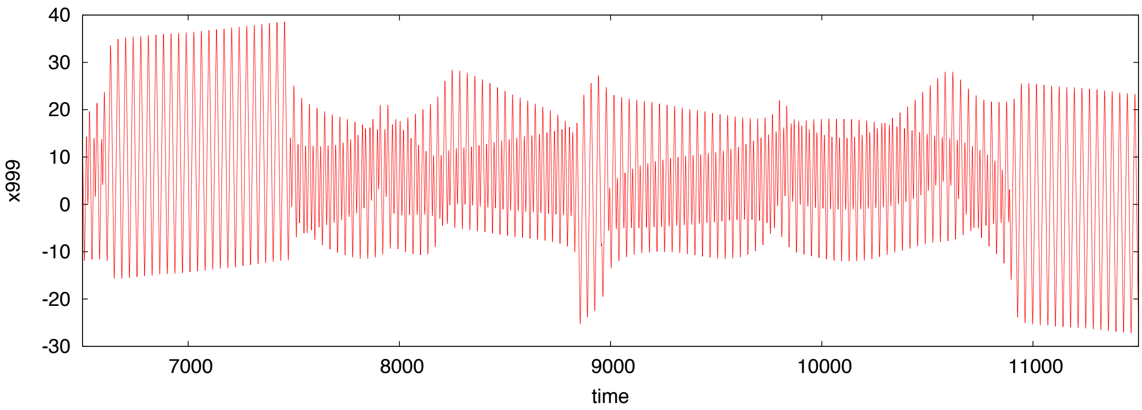

図 3: $i = 999$ の素子の振幅変化．$A = 5, \alpha = 3, \omega = 0.88$.

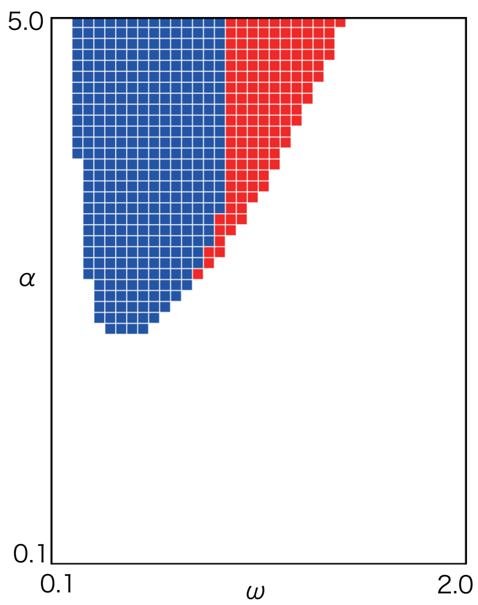

図 5: $A = 5$ のときの相図．白い部分は、減衰する相のパラメータ領域．赤色（右側）は、奇妙な相．青色（左側）は、周期的な相．

4　まとめと展望

高階微分の効果を表現した結合素子の振る舞いを調べるために、OV モデルを使った．素子を直線上に配置し、外力として、周期的な入力を与えることにより、その伝達特性を調べた．正弦波の入力に対して、伝わり方を 3 つに分類することができた．そして、奇妙な相では、入力の周期より遥かに長い周期が出現することがわかった．また α, ω に対する相図を得た．

今回はすべて数値計算シミュレーションを行った結果である．今後、各相の境界を解析的に求めたい．また、複数の素子間での相互作用を考え、素子をネットワーク上に乗せ、そこでの振る舞いの特徴などを調べたい．

参考文献

[1] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata and Y. Sugiyama, *Phys. Rev. E* **51**, 1035 (1995).