

砂丘骨格模型による定常バルハンの形成とスケーリング

新屋 啓文, 粟津 暁紀, 西森 拓

広島大学大学院 理学研究科 数理分子生命理学専攻

概要

砂丘骨格模型 [1] は、一方向の風の下での砂丘の形成過程や運動を記述する縮約模型であり、砂の量と風の強さに応じ、実際の砂漠地帯で見られる典型的な 3 形態の砂丘 (直線・波状の横列砂丘、バルハン) の形成過程を再現し、さらに形状の安定性の理論解析も可能とすることがわかっている。今回、我々は砂丘骨格模型を用いて、定常バルハンの形成過程、形状や運動に関するスケーリング則、および、上流からの砂の供給方法・量の違いがバルハンの安定性に及ぼす影響について調べた。その結果、以下のことが明らかになった。i) 上流から空間的に一様な砂が供給される場合、定常バルハンが実現するために許される供給量の範囲が狭く、また、形成されるバルハンのサイズはほぼ一意的となる。ii) バルハン中心軸付近への局所的な砂の供給の場合、広い範囲の供給量で定常バルハンが実現され、供給量に応じたサイズの異なる定常バルハンが形成される。また、その形状に関するスケール則および移動速度は観測・実験事実に対応する。

Formation of Steady Barchans and the Scaling Law Using Dune Skeleton Model

Hirofumi Niiya, Akinori Awazu, Hiraku Nishimori

Department of Mathematical and Life Sciences, Hiroshima University.

Abstract

Dune *skeleton model* [1] is a reduced model to describe the formation process and the dynamics of dunes emerging under unidirectional steady wind. So far it has been shown that the Dune *skeleton model* reproduces 3 typical shapes of dunes: straight transverse dune, wavy transverse dune, and barchan, depending on the amount of available sand and wind strength. Here, we study on the steadiness of barchan size, and the scaling relations with respect to their shape through the numerical simulation of the Dune *skeleton model* using 2 different types of sand flux condition from the upwind boundary: i) spatially uniform supply and ii) local supply. It was found that; i) under the uniform supply, steadily maintained barchans are formed within a narrow range of supply and their size is almost unique independent of supply. ii) under the local supply around the central axis of barchan, steadily maintained barchan is formed and its size varies according to the amount of sand supply. Moreover, the scaling relations with respect to their shape and dynamics is found that corresponds to observation and experimental fact.

1 はじめに

砂丘は地上で最大の粉粒体地形であり、大域的なネットワークを形成する。そして、砂丘は周りを吹く風によって移動し、風向きの変化に応じて、三日月型や棒状、星型、ドーム型など様々な形状を示す

[2]。これらの砂丘の形状は主に、砂漠上における風向の定常性と砂の量の 2 つで分類される。中でも、バルハンと呼ばれる三日月型砂丘は、風向きが一方向で砂の量が少ない場合に形成される。その特徴的な性質として、バルハンは風下に 2 つの角 (horn) を持ち、一定の形状比を保ちながら風下方向へ移動

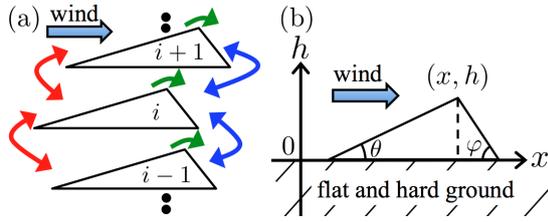


図 1: (a) 砂丘骨格模型の模式図、矢印は砂の流れを表す (b) 断面の性質と地面の特徴

する点と、バルハンの移動速度は高さにはほぼ反比例する点があげられる [3]。これらの性質は、水槽実験やセルモデルの数値シミュレーションにより、再現されつつある [4, 5, 6, 7]。しかし、砂丘形態の定量的な理解はほとんど進んでいないのが現状である。

そこで、砂丘形態を定量的に捉えるために考案された、2次元断面の結合系から構成される砂丘骨格模型 [1] では、砂の量と風の強さに応じ、直線状・波状の横列砂丘とバルハンの3形態がこれまでに得られている。本研究では、砂丘骨格模型により得られた3形態の内、バルハンに焦点を当て、定常バルハンの形成条件と形状に関するスケージング則について調べた。

2 砂丘骨格模型

砂丘骨格模型は、砂丘の変形や移動過程を1次元結合力学系として記述したモデルであり、風向きが一方の場合に形成される単体の横列砂丘とバルハンを対象としている。砂丘の概形は、2次元断面を風向きに沿った方向に一定間隔で並べ、断面の集合で形作る。そして、砂丘の形状の変化と移動は、各断面の移動と断面間の相互作用を考慮することで表現可能となる (図 1(a))。

横列砂丘とバルハンの風上と風下の傾斜角は、ほぼ一定であることが観測から得られている。そのため、用いる断面は大きさによらず相似な三角形 (θ, φ :一定) であり、砂のない水平な岩盤上に配置されるものとする (図 1(b))。変数は各断面 i の頂点の高さ h_i と進行方向の位置 x_i の2変数である。また、幾何学定数 A, B, C が、

$$A = \frac{\tan \theta \tan \varphi}{\tan \theta + \tan \varphi}, B = \frac{\tan \varphi}{\tan \theta + \tan \varphi}, C = \frac{\tan \theta}{\tan \theta + \tan \varphi}$$

として定義される。実際の横列砂丘とバルハンの傾斜角を反映させるため、 A, B, C に、それぞれ $1/10, 4/5, 1/5$ と与えている。

砂丘上の砂の流れは断面内と断面間の2種類に分けられている。まず、断面内の砂の流れは、尾根

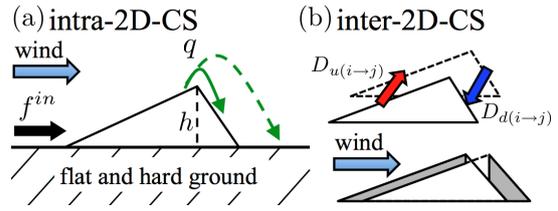


図 2: (a) 断面内の砂の流れ (b) 断面間の砂の流れ

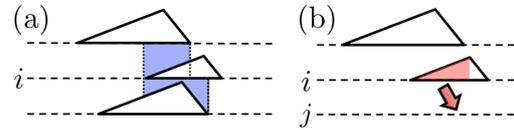


図 3: (a) 隣り合う断面との重なり (b) 消滅した箇所への砂の流入、赤領域は拡散範囲を表す

(断面の頂点) を越える砂と上流からの砂の供給の2つがあり、それぞれの流量を q, f^{in} と表記する (図 2(a))。そして、尾根を越える砂は風下斜面と下流地面へ堆積し、風下斜面への堆積率 T_E は断面の高さに依存し、

$$T_E(h) = \frac{h}{1.0 + h}$$

として与えられる。ただし、 q は断面の高さによらず一定である。また、上流からの砂の供給はすべて風上斜面に堆積する。次に、断面間の砂の流れは隣り合う断面間 i, j の風上、風下斜面で起こり、それぞれの流量を $D_{u(i \rightarrow j)}, D_{d(i \rightarrow j)}$ と表記する。そして、流量は図 2(b) の灰色領域の定数倍であり、斜面の高低差と斜面長に依存する拡散として取り入れた。風上、風下の拡散係数を、 ν_u, ν_d と表記する。

以上の砂の流れを考慮することで、各断面 i の頂点の高さ h_i と位置 x_i の連立常微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{dh_i}{dt} &= \frac{A}{h_i} \left[q(T_E(h_i) - 1) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=i \pm 1} (D_{d(i \rightarrow j)} - D_{u(i \rightarrow j)}) + f_i^{in} \right] \\ \frac{dx_i}{dt} &= \frac{1}{h_i} \left[q(BT_E(h_i) + C) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=i \pm 1} (BD_{d(i \rightarrow j)} + CD_{u(i \rightarrow j)}) - f_i^{in} \right] \end{aligned}$$

が導出される。今回、この力学系に対し断面の消滅と生成を取り入れた。断面の消滅は、

- 砂の流出により高さが0となった場合

- 断面間の重なり (図 3(a) の青色領域) がなくなった場合

の一方で成り立つときに起こる。後者は、断面間の相互作用が弱まり、断面が下流へ逃げる状況を仮定している。消滅する断面の高さ h_i と位置 x_i は、それぞれ地面の高さと隣り合う断面の風下斜面の先端

$$h_i = 0, x_i = \max_{j=i \pm 1} \left[x_j + \frac{C}{A} h_j \right]$$

に固定する。このとき、隣り合う断面から消滅した箇所へ $D_{u(i \rightarrow j)}$ に従い、砂が流れ込む (図 3(b))。そこで、断面の生成は、その単位時間当たりの流量により生成される断面の高さ $h_j = h_i \sqrt{\nu_u B}$ か³、閾値 Min_h を越えているかどうかで判定する。

- 閾値を越えている場合
微小時間 Δt の流量で断面を生成する。

$$h_j = h_i \sqrt{\Delta t \nu_u B}, x_j = x_i$$

- 閾値を越えていない場合
下流への砂の流出とみなす。

ただし、閾値の値は $Min_h = 0.01$ である。

3 計算結果

砂丘骨格模型 (SM:skeleton model) により得られた結果の妥当性を検証するため、現実の砂丘形状やダイナミクスをよく再現している勝木らのセルモデル (CM:cellular model)[7] による結果と比較を行った。

cellular model(CM)

フィールドは 200×200 の正方格子を用い、x 軸方向にのみ風が吹いているものとする。そして、上流の境界には固定境界条件を用い砂の供給、下流の境界には自由境界条件を用い砂の流出を考慮した。また、初期状態には、 $h(x, y) = 20 \exp\{-[(x - 100)^2 + (y - 100)^2]/50\}$ のようなガウス分布に従う砂山を配置した。その他の設定 (飛砂と雪崩) に関しては [7] と同等の関数、パラメータの値を用いた。ただし、シミュレーションでは重心をフィールドの中心に固定した。

skeleton model(SM)

初期状態には、高さ、位置ともに一様な断面 $h_i(0) = 30, x_i(0) = 0$ を 101 枚 ($i = 0 \dots, 100$) 配置する。パラメータは、砂の流れに関する q, ν_u, ν_d があり、 $q = 0.1, \nu_d = 0.1$ と固定し、 ν_u を変化させる。

砂漠上では、上流から砂丘全体に砂が供給される場合と、他の砂丘から逃げた砂を部分的に受け

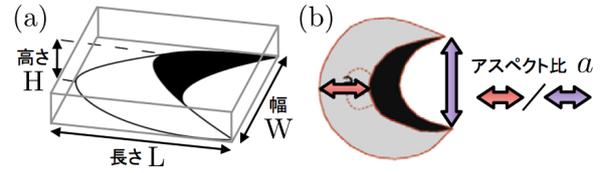


図 4: (a) バルハンのスケールの定義 (b) アスペクト比の定義

取る場合が確認される。そこで、上流からの砂の供給方法と供給量に応じたバルハンの定常性を調べるため、次の 2 種類についてシミュレーションを行った。

(a) 一様供給

CM では上流境界の全セルに定数 q_{in} を与え下流に流す。SM では各断面の上流からの砂の供給量 f_i^{in} に定数 q_{in} を与える。

(b) 部分供給 (ガウス分布)

上流からの砂の供給について、CM では上流境界、SM では初期配置の中心軸断面に平均をもつガウス分布で与える。

$$h(0, y) = \frac{q_{in}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(y - \mu_c)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (CM)$$

$$f_i^{in} = \frac{q_{in}}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(i - \mu_s)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (SM)$$

ただし、 $\mu_c = 100, \mu_s = 50, \sigma = 10$ である。

また、SM におけるバルハンの定常性を図 4(a) で定義されるバルハンの高さ H 、幅 W の値に従い、以下の 4 つに分類した。

1 消滅: $H(t) = 0$ を満たす場合、砂丘の消滅と判定

2 定常: $t = 10^7$ の時点で、 $|H(10^7) - H(9.9 \times 10^6)| < 10^{-6}$ を満たす場合、バルハンが時間的に安定であると判定

3 減少: $t = 10^7$ の時点で、 $H(10^7) - H(9.9 \times 10^6) \leq -10^{-6}$ を満たす場合、バルハンが減衰していると判定

4 増加: $t = 10^7$ の時点で、 $H(10^7) - H(9.9 \times 10^6) \geq 10^{-6}$ を満たす場合、または、 $W > 1000$ を満たす場合、バルハンが増大していると判定

一様供給の場合には、砂の供給量 IN の増加に伴い砂丘の消滅から増加に転じることが、CM、SM ともに見られた (図 5(a))。また、SM において、定常となり得る領域は狭く、ほぼ等しいサイズのバルハンが形成された。一方、部分供給の場合には、 IN の増加に従い消滅から増加に転じる傾向は CM、SM ともに同じである (図 5(b))。しかし、SM において、定常となり得る領域は広く、異なるサイズのバルハンが形成された。

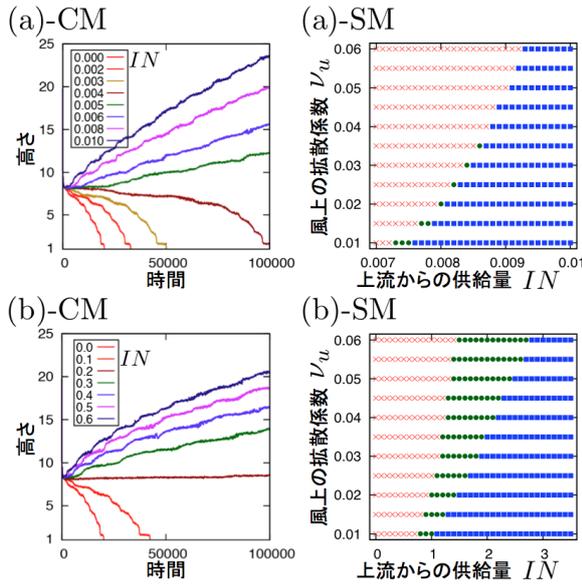


図 5: 供給方法と量におけるバルハンの定常性, (a) 一様供給 (b) 部分供給, SM の相図において、 \times : 消滅, \blacktriangle : 減少, \bullet : 定常, \blacksquare : 増加を表す

そこで、部分供給における定常バルハンのスケール、移動速度、アスペクト比を風上の拡散係数 ν_u ごとに表示した。ここで、アスペクト比 a は風上斜面長を幅で割った値であり、 a の増加は風向きに伸びたバルハンが形成されることを示す [8] (図 4(b))。まず、高さ と長さ、幅の関係は、 ν_u の減少に従い、線型に近づいている (図 6(a),(b))。一方、高さ と移動速度の関係は、 ν_u の影響がほとんどなく、反比例である (図 6(c))。そのため、移動速度は、尾根を越える砂 q と堆積率 T_E に強く依存していると考えられる。また、アスペクト比 a は ν_u ごとにほぼ一定であるが、 ν_u の減少に従い、 a が増加していることが分かった (図 6(d))。

4 まとめと今後の展望

今回、我々は上流からの砂の供給方法と供給量に応じたバルハンの定常性について、砂丘骨格模型を用いセルモデルと比較した。その結果、風上斜面の風と垂直方向の砂の流量の減少はバルハンの高さ-長さ、高さ-幅の関係を線型に近づけ、アスペクト比を増加させることが分かった。これらの結果は、観測・実験事実をよく再現している。また、地球上のバルハンは観測地域によらず、ほぼ一定のアスペクト比であるが、火星上のバルハンはアスペクト比の変化が大きいため、斜面上の砂の流れが重要な要因になることを示唆している。砂丘骨格模型の最大特徴は砂丘の形状や安定性を解析的に議論できることである。供給量に応じたバルハンの安定性の

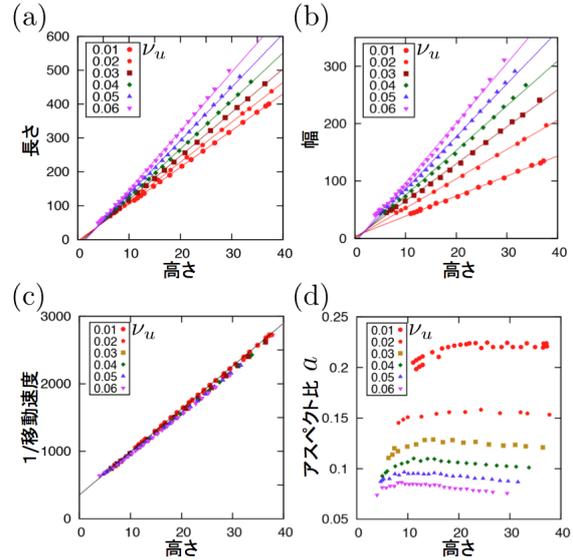


図 6: 高さ、長さ、幅、移動速度、アスペクト比の関係、(a) 高さ と長さ (b) 高さ と幅 (c) 高さ と移動速度 (d) 高さ とアスペクト比、(a),(b) の実線は各 ν_u のデータを一次関数で最小二乗法近似した直線である

解析およびスケールが線型でありうる要因を今後議論する必要がある。

参考文献

- [1] H. Niiya, A. Awazu, and H. Nishimori: J. Phys. Soc. Jpn. **79** (2010) 063002.
- [2] R. U. Cooke, A. Warren, and A. Goudie: *Desert Geomorphology* (UCL Press, London, 1993) p. 534.
- [3] B. Andreotti, P. Claudin, and S. Douady: Eur. Phys. J. B. **28** (2002) 321.
- [4] P. Hersen, S. Douady, and B. Andreotti: Phys. Rev. Lett. **89** (2002) 264301.
- [5] S.R. Bishop, H. Momiji, R. Carretero-González, and A. Warren: Discrete Dyn. Nat. Soc. **7** (2002) 321.
- [6] C. Narteau, D. Zhang, O. Rozier, and P. Claudin: J. Geophys. Res. **114** (2009) F03006.
- [7] A. Katsuki, M. Kikuchi, H. Nishimori, N. Endo, and K. Taniguchi: Earth Surf. Process. Landforms, n/a. doi: 10.1002/esp.2049
- [8] M.C. Bourke, A.S. Goudie: Aeolian Research **1** (2009) 45.