

Swarm oscillator モデルにおける集団現象

巖佐正智, 田中ダン

名古屋大学大学院 情報科学研究科 複雑系科学専攻

Abstract

自己組織化の起こる相互作用多粒子系として、多数の素子からなる Swarm Oscillator モデルが知られている。各素子は空間的位置と内部状態を自由度として持ち、それらの差から定まる相互作用により、様々な集団的挙動を示すことが数値シミュレーションにより知られている。本稿では、モデルが含む4つのパラメータのうち2つと、素子数、システムサイズを固定し、集団挙動の残りのパラメータに対する依存性を調べた。結果、13種類の挙動が確認され、相図を得た。

Collective behavior in the system of swarm oscillators

Masatomo Iwasa, Dan Tanaka

Department of Complex Systems Science, Graduate School of Information Science, Nagoya University

Abstract

We study the swarm oscillator model, a model of a self-organizing system composed of motile elements with an internal degree of freedom. This system exhibits various types of collective behavior depending on the four parameters, the system size and the number of elements. In this study, we investigate the dependence of the collective behavior on the two parameters of the four. As a result, thirteen kinds of behavior are found, and the phase diagram is obtained.

素子が相互作用して、結果として集団的な挙動が発現する現象は、自然や社会に広くみられ、枚挙に暇がない [1, 2, 3, 4]。素子間のミクロな相互作用と集団が示すマクロな挙動との間に成立する関係の発見は、自然科学や社会科学のみならず、応用面でも重要な課題であろう [5, 6]。この課題の解決に向けては様々な方策が考えられるが、その一つとして、ある適切な特定のモデルを数理的に詳細に解析し、素子間相互作用と集団現象との関係を一般的に探る方法が考えられる。

本稿では、そのようなモデルとして Swarm oscillator モデルを取り上げる [7]。内部自由度と空間自由度を持つ素子が相互作用する多素子系のモデルであり、具体的には、 i 番目の素子の時間発展が以下で記述される系である：

$$\frac{d}{dt}\psi_i = \sum_{\{j|j \neq i\}} e^{-|\mathbf{R}_{ji}|} \sin(\Psi_{ji} + \alpha |\mathbf{R}_{ji}| - c_1),$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}_i = c_3 \sum_{\{j|j \neq i\}} \hat{\mathbf{R}}_{ji} e^{-|\mathbf{R}_{ji}|} \sin(\Psi_{ji} + \alpha |\mathbf{R}_{ji}| - c_2).$$

ここで、 $\psi_i \pmod{2\pi}$ と \mathbf{r}_i はそれぞれ、各素子の内部状態 (以下では単に位相と呼ぶ) と、空間位置を表す。本稿では特に2次元空間中の挙動を考える。他の量は $\mathbf{R}_{ji} := \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$, $\hat{\mathbf{R}}_{ji} := \mathbf{R}_{ji}/|\mathbf{R}_{ji}|$, $\Psi_{ji} = \psi_j - \psi_i$ である。モデルは4つのパラメータ $0 \leq c_1, c_2 < 2\pi, 0 \leq c_3, 0 \leq \alpha$ を含み、さらに、システムサイズ L や素子数 N にも依存して、多様な集団的挙動を示す。各パラメータの数理的意味は、以下のようなものである: c_1 と c_2 は、相互作用の非対称性の度合を定める。 c_3 は、位置変化と位相変化の時間スケールの比を定める。 α は、 \sin 関数の空間的な周期を定めるが、それは2素子間の平衡距離を定めることを意味する [8]。このモデルには物理学的な背景があり、ある化学物質の場に置かれた走化性振動子集団の、長時間後の挙動として導出されたものである。

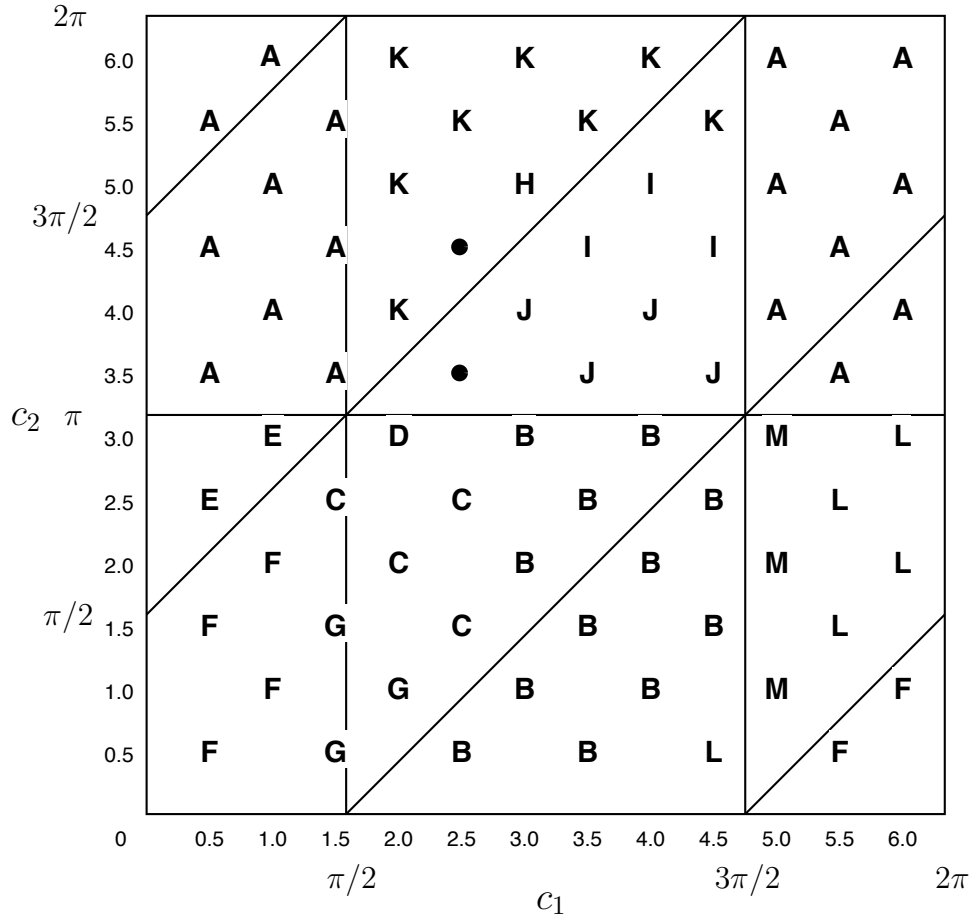


図1: c_1 - c_2 空間で数値計算により調べられた相図. 計算の条件については本文参照. A-M は, 相の分類名であり, 図2-図6 のスナップショットに対応する. ●で示されている $(c_1, c_2) = (2.5, 3.5), (2.5, 4.5)$ の2点では, 周辺相の中間的な挙動を示す. 7本の直線, $c_1 = \pi/2, 3\pi/2, c_2 = \pi, c_1 - c_2 = (2n - 1)\pi/2$ ($n = -1, 0, 1, 2$) は, 2素子系の解析結果に基づいて引かれている (本文参照).

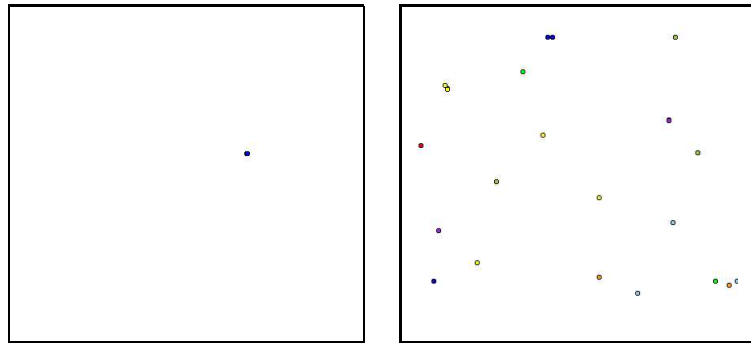


図2: [左] A相 (凝集, 同期): 素子が一点または数点に集まる. 一つの点にある素子は全て同期している. 凝集点が一点の場合には静止するが, 複数残った場合には, 相互作用により動きつづける. [右] B相 (凝集, 非同期): 近い素子同士が一点に集まり, 静止する. 一つの点にある素子の位相は同期していない.

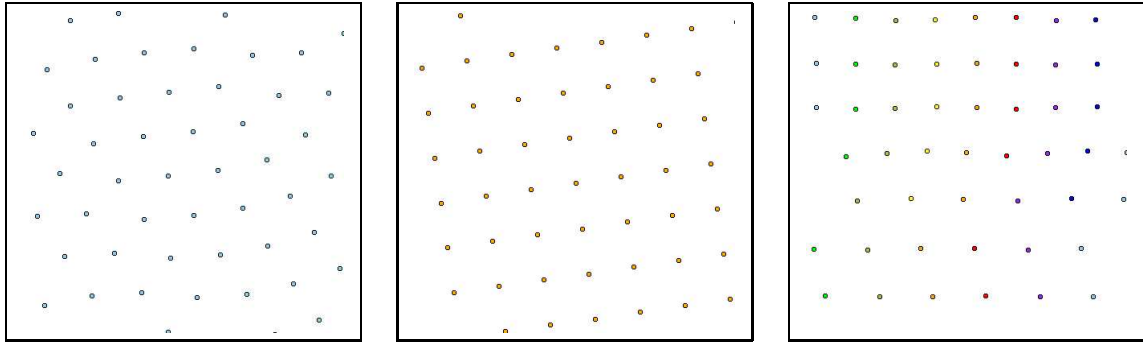


図3: [左] C相 (三角格子, 同期): 素子は系全体に広がり, 三角格子上に配位する. 素子は全て同期する. [中] D相 (四角格子, 同期): 素子は系全体に広がり, 四角格子上に配位する. 素子は全て同期する. [右] E相 (格子状定常流, 位相波): 素子は格子状に配位し, ある方向に一定速度で流れる. 格子中には位相の平面波が現れ, 素子の流れと同じ方向に異なる速さで流れる.

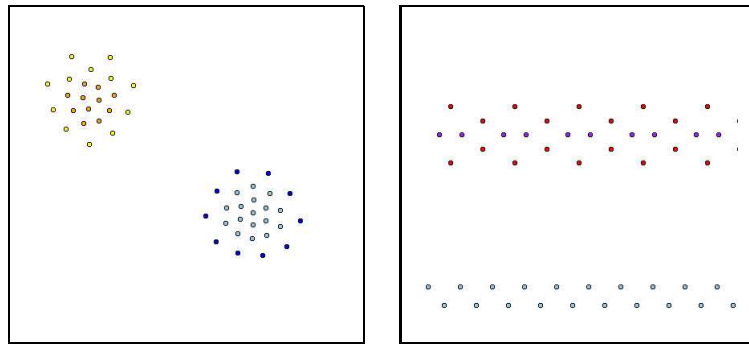


図4: [左] F相 (2次元的クラスター): 非自明な距離において2次元的に配位したクラスターが, 1つまたは2つ形成される. 各クラスターは形を変えず形状を保ち, 移動する. 2つのクラスターが残った場合は, クラスター間の距離は一定に保たれる. クラスター内の素子は同期する. [右] G相 (1次元的クラスター): 素子が非自明な距離において1次元または擬1次元的に, 境界を越えて配位する. 各クラスターは形を変えず形状を保ち, 移動する. 2つのクラスターが残った場合は, クラスター間の距離は一定に保たれる. クラスター内の素子は同期する.

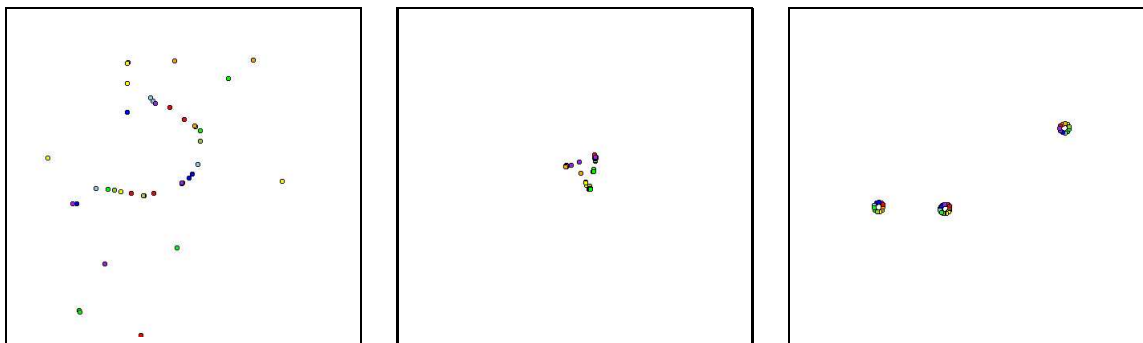


図5: [左] H相 (動的曲線): 多くの素子が曲線状に配位する. 曲線は波打ち続け, システム全体を動きまわる. 曲線を構成する素子は次々に入れ替わる. 曲線上には, 崩れた位相平面波が現れる. [中] I相 (回転する多角形): 素子が多角形を構成し, 多角形は回転し続ける. 頂点には, 多くの素子が集まる. 各頂点は回転と同じ向きに素子を受渡しし続ける. 頂点の数はパラメータに依存する. c_1 が大きい場合, 頂点数は2にさえなる. 空間的に近い素子は位相も近いが, 同期しない. [右] J相 (回転する円, 位相波): 素子は円状に配位し, 円は回転しつづける. 最終的に1つまたは数個の円が残る. 各円には位相の平面波が現れる.

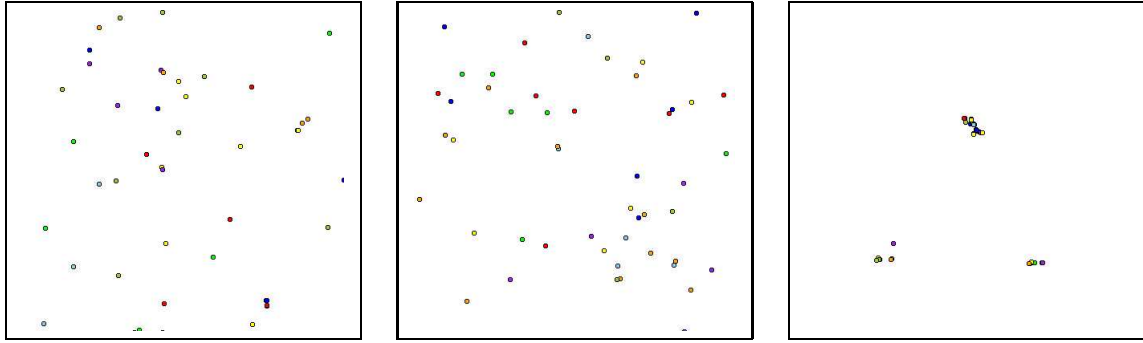


図6: [左] K相 (散乱): 位相が近い素子同士は近付き, 位相差が大きくなるにつれ, やがてまた離れるという挙動を示す. その時々で空間的に近い素子と, この挙動を繰り返し続けることにより, 素子同士の散乱が絶えず起こっている相であると見なされる. [中] L相 (散乱): 空間的な挙動を見れば, K相と同じである. ただし, 位相に着目すると, K相と正反対の挙動を示す. すなわち, 位相が離れた素子同士が近付き, 位相差が小さくなるにつれ, やがてまた離れるという挙動を繰り返す. [右] M相 (クラスター, 動的): 近い素子同士で集まって局在し, 局在したある領域の中で乱雑に動きつづける. 各クラスター内の素子は同期しない.

このモデルは, 1) 多様な集団現象を示す, 2) 物理学的な背景がある, 3) 解析的計算による数理解が可能である. という3つの特徴を併せ持ち, 冒頭の目的に沿ったモデルの一つと捉えられるであろう.

本稿では, 特に, $c_3 = \alpha = 1.0$, $L \times L = 10 \times 10$, $N = 50$ を固定し, 現れる集団的挙動の c_1 と c_2 への依存性を数値的に調べた. 周期境界条件の下, $(c_1, c_2) = (n, m), (n + 0.5, m + 0.5)$ (n, m は整数) において, 数値計算を行った. 図1は結果得られた相図である. ランダムに選ばれた初期状態に対する計算の, 長時間後の挙動に注目し, 集団の挙動は目視により13種類に分類された. それらはA-Mでラベルされている. 分類の際には, 素子が1) 静止するか否か, 2) 局在するか否か, 3) 形成する形, 4) 同期するか否か, の4点に注目した. 各相のスナップショットを図2から図6に示す. 各 (c_1, c_2) に対し, 出現する相は初期条件には依存しない. 離散的な点で調べた結果のため, 他の点で別の種類の相が出現する可能性も否定できないが, 各相の境界と考えられる付近でより詳細に調べたところ, 現時点では他の相は発見されていない.

最後に, 各相の数理的な出現理由は, いくつかの相を除いて, 2素子系の解析結果から理解できることを注記しておく. 2素子系の挙動はその空間的距離と位相差の2変数のダイナミクスに帰着される. その2次元ベクトル場は, $\cos(c_2 - c_1) = 0$ で分岐することが判っている [8]. さらに, 空間的距離が0に近い範囲でのベクトル場は, $c_1 = \pi/2, 3\pi/2$ と $c_2 = 0, \pi$ を境にトポロジカルに変化することも, 具

体的な計算により判る. これらの分岐線が図1に描かれている. これらにより説明される相境界も多いことが判る. 紙面の都合上, 本稿では詳細を割愛するが, 2素子系のさらに詳細な解析 (固定点やその安定性, ベイスンなどへの着目) から, さらにかなりの相境界が説明可能であることを追記しておく. 一方, C-D境界, E-L境界, I-J境界, K-H境界については, それらの出現理由は, 2素子系の挙動からは不明であり, 多体効果が本質的に重要な挙動だと判断されるため, 異なるアプローチによる今後の説明が必要である.

参考文献

- [1] G. M. Whitesides, *Science* **295**, 2418 (2002).
- [2] J-M. Lehn, *Science* **295**, 2400 (2002).
- [3] T. Misteli, *Cell*, **155**, 181 (2001).
- [4] C. Castellano, S. Fortunato, and V. Loreto, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 591 (2009).
- [5] M. Grunze, *Nature (London)* **454**, 585 (2008).
- [6] R. Pfeifer, M. Lungarella, and F. Iida, *Science* **318**, 1088 (2007).
- [7] D. Tanaka, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 134103 (2007).
- [8] M. Iwasa and D. Tanaka, *Phys. Rev. E* **81** 066214 (2010).