

走化性を考慮した準一次元交通流における クラスタの成長と流量との関係

藤井 雅史 粟津 暁紀 西森 拓

広島大学大学院 理学研究科 数理分子生命理学専攻

概要

これまで、準一次元空間内をフェロモンを介して相互作用しながら双方向に行き来する粒子集団の振る舞いを研究してきた。様々なフェロモンの蒸発率に対する粒子密度と流量の関係調べた結果、低密度領域ではフェロモンが蒸発しない場合に流量は最大となり、密度が高くなるとフェロモンが適度に蒸発する場合に流量は最大となることが分かった [M. Fujii *et al.*: J. Phys. Soc. Jpn. **78** (2009) 073801]。特に、流量が小さいところでは粒子はクラスタを形成して道を塞いでいる状態が観察され、流量とクラスタの形成には密接な関係があると考えられる。そこで今回は、クラスタ内にある粒子数の増減の時間発展の数値実験式を構成し、これをもとに Langevin 方程式を導出し、シミュレーションによる解析を行った。これまでの結果と比較すると、クラスタが維持されにくいフェロモン蒸発率 ($f = 0, 0.3, 1$) の下では、粒子密度と流量の関係がクラスタに含まれる粒子数によって支配されることが得られた。しかし、クラスタが維持されやすいフェロモン蒸発率 ($f = 0.01$) においては、これまでの研究とは異なった結果が得られた。

Relation between Flux and Growth of Cluster for Counter Chemotactic Flow in Quasi-One-Dimensional Path

Masashi FUJII, Akinori AWAZU, Hiraku NISHIMORI

Department of Mathematical and Life Sciences, Hiroshima University.

Abstract

So far, we have investigated the behavior of counter chemotactic flow in a quasi-one-dimensional path where particles interact with each other through pheromone. The relation between particle density and flux was studied for several evaporation rate of pheromone in that system, and the following results were obtained: in the low-particle-density range, the flux is enlarged by pheromone if the evaporation of pheromone is sufficient low, and, in the high-particle-density range, the flux is largest at a reasonably high evaporation rate of pheromone [M. Fujii *et al.*: J. Phys. Soc. Jpn. **78** (2009) 073801]. In that study, it was characteristic that particles form cluster which blocks the path in the low-flux-region, thus, it seems that formation and size evolution of cluster is directly related to the flux. In this paper, on the basis of obtained relation between the number of particle in cluster and the escaping time of trapped particle in cluster through Cellular Automata Model, a Langevin Eq. for time evolution of number of particle in cluster is derived, and its numerical simulation is performed. Compared to previous results, it is found that if the evaporation rate of pheromone is set so that cluster is not easily maintained ($f = 0, 0.3, \text{ and } 1$), the number of particles in cluster governs the relation between particle density and flux. In the opposite case, where $f = 0.01$, the obtained result through Langevin Eq. is different from the previous study.

I. はじめに

我々の身の回りにおいて歩行者の交通・車の交通・粉体の流れ・インターネット通信・化学反応ネットワークあるいはタンパク質の輸送など、様々な状況で物の流れが起こっている [1]-[8]。近年の情報技術

の発達とともに物の流れに関する研究やその解析手法は飛躍的に発展している。物の流れの研究の一つとして流れが滞った状態、すなわち渋滞が発生するまでのプロセスやその解消のメカニズムの解消などが挙げられる。しかし、同様の物の流れとしてアリ



図1: 進路選択の方法。粒子の進行方向を前方として、1) 前方のセル・2) 斜め前方のセル・3) 真横のセル・4) 斜め後方のセル・5) 後方のセルの順に近傍のセルに粒子がいるかどうかの判定を行い、粒子がいない近傍のセルのうち最も番号の小さいセルを進路として選択する。

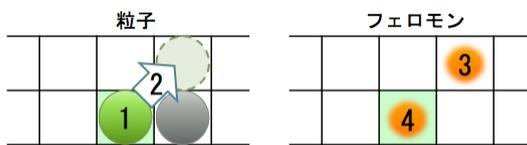


図2: 1時間ステップの流れ。(1)(2) L セルの中からランダムに1セルを選び、そのセルに粒子がいるかどうかの判定を行う。(2) 粒子がいる場合、図1の規則に従って進路を選択し、進路にフェロモンが存在する場合は確率 Q で、存在しない場合は確率 q で進路のセルに移動する(走化性の効果を取り入れるため $Q > q$ とする)。(3) 移動した場合は移動後のセルにフェロモンを置き(分泌)、(4) 移動前のセルのフェロモンを確率 f で取り除く(蒸発)。※ (1)の際に粒子がいなければ(4)のみを行う。以上の(1)から(4)を(2) L 回繰り返して1時間ステップとする。

の交通(行列)を見てみると、アリはフェロモンと呼ばれる化学物質を用いて局所的に情報をやりとりし、大域的に見れば非常に長い行列を作っているにも関わらず、歩行者や車の交通でよく見られるような完全に停止する程の渋滞は起こっていないようにも見える[9, 10]。そこで我々は、フェロモンによって相互作用する粒子集団の交通を考えることが、渋滞のメカニズムの解明に繋がると考え、研究を行ってきた[11, 12]。その中で、粒子集団のクラスター化が流れに大きく影響を与えると推測し、クラスターの成長や解消に関する考察を行った。

II. 確率セルオートマトンモデル (Ant-traffic model)

我々のこれまでの研究[11, 12]では、Kunwarらによるbi-directional Ant-traffic model[10]を拡張した以下のような確率セルオートマトンモデルを用い、粒子の振る舞いを考察した。モデルでは道路長 L の車線を2車線並べた準一次元空間において、粒子は図1上のように左右どちらかに進行方向を持ち、境界まで進んだ場合には進行方向を反対逆方向にする。アリの走化性を取り入れるため、粒子は場に存在するフェロモンを介して相互作用する。ただし各セルに粒子及びフェロモンは1つずつしか入れないとする(排除体積効果)。粒子の進路の選択の方法、1時間ステップの流れはそれぞれ図1、2に従う。シミュ

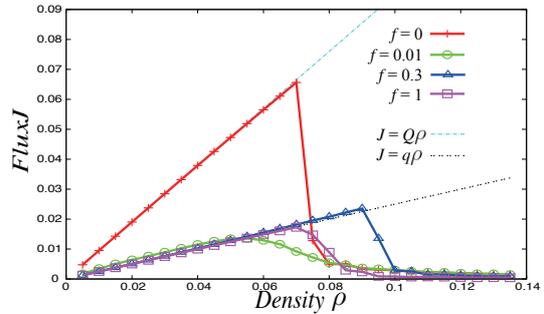


図3: 粒子密度 ρ (横軸) と流量 J (縦軸) の関係(基本図)。フェロモン蒸発率 f が0は赤で、0.01は緑で、0.3は青で、1は紫でプロットしている。

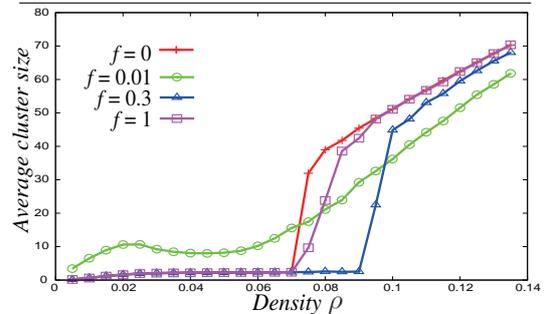


図4: 粒子密度 ρ (横軸) とクラスターサイズの時間平均(縦軸)の関係。フェロモン蒸発率 f が0は赤で、0.01は緑で、0.3は青で、1は紫でプロットしている。

レーションはモンテカルロ法を用いて行う。

III. これまでの研究

これまでの研究では流れを表す指標として、流量とクラスターサイズを調べた。ここで、1時間ステップあたりに粒子が左端に到達する回数を流量とし、図1の左右方向に(粒子の進行方向に関係なく)粒子間間隔が2以上空いていない粒子の集まりを1つのクラスター、クラスターの粒子の進行方向軸の空間の長さをクラスターサイズとした。上述のモデルにおいて道路長 $L = 500$ 、進路として選択したセルにフェロモンが存在する場合の移動確率 $Q = 0.95$ 、フェロモンが存在しない場合の移動確率 $q = 0.25$ とし、フェロモン蒸発率 $f = 0, 0.01, 0.3, 1$ の場合の各粒子密度でのシミュレーションを 10^7 時間ステップ行った結果、粒子密度 $\rho (= N/(2L))$ と流量 J の関係(図3)と、粒子密度とクラスターサイズの時間平均の関係(図4)を得た。

粒子密度と流量の関係(基本図: 図3)を見ると、フェロモン蒸発率 $f = 0, 0.3, 1$ の場合の流量は、それぞれある粒子密度までは粒子密度に対しほぼ線形に増加し、さらに粒子密度が上がると急激に0付近まで減少する。さらに、粒子密度0.07付近までは $f = 0$ のときに流量が最大となるのに対し、粒子密度が0.07を越えると $f = 0.3$ のときに流量が最大となる。すなわち、やや高い密度領域ではフェロモン

が蒸発しない場合よりもフェロモンが適度に蒸発する場合の方が流れが滞りにくいことが分かる。一方、 $f = 0.01$ では粒子密度が 0.05 付近までは $J = q\rho$ よりやや上の値を取りながら増加し、さらに粒子密度が上がると他の場合 ($f = 0, 0.3, 1$) と異なり緩やかに減少する。

また、粒子密度と平均クラスターサイズの関係 (図 4) を見ると、図 3 において $f = 0, 0.3, 1$ の場合での流量が粒子密度に比例して増加している領域では平均クラスターサイズはほとんど小さい値を取り、ある粒子密度で急激に大きくなる。それに対し、 $f = 0.01$ の場合は低密度領域では平均クラスターサイズは他の場合に比べてやや大きな値を取り、急激に上がることは無く、高密度領域では他の場合より小さい値を取る。粒子の動きを見ると、 $f = 0.01$ 付近ではフェロモンがわずかに蒸発するために、大きなクラスターが形成されやすい¹[12]。

IV. クラスターの成長

今回我々は、1 時間ステップあたりにクラスターを抜け出す粒子数とクラスターに入ってくる粒子数の差によって、クラスターに含まれる粒子数の時間発展を Langevin 方程式で表現し、図 3 で示された基本図の再現と渋滞のメカニズムの解明を目指す。

まず、1 時間ステップあたりにクラスターを抜け出す粒子数を求めるために、1 つの粒子がクラスターを抜け出してから次に他の粒子が抜け出すまでにかかる時間 (以後、クラスターを抜け出す粒子の「時間間隔」と呼ぶ) を測定した。II のモデルにおいて、道路長 L を $(N + 20)/2$ (小数点以下切り上げ、 N : 全粒子数) とし、クラスターが崩れにくい状況にした。移動確率 Q, q はこれまでの研究と同様にそれぞれ 0.95、0.25 とした。初期時刻では、粒子を道路の中央に集めて人工的にクラスターを作成し、中央から左側にいる粒子を右向きに、右側にいる粒子を左向きに設定した。図 5 がシミュレーションで得られたクラスター内にある粒子数 n とクラスターを抜け出す粒子の時間間隔の関係で、図の各点が計測によって得られた点で、実線が $n > 10$ でのフィッティング関数

$$\frac{1}{20[q + (Q - q)(1 - f)^3]} n^{1.85} \quad (1)$$

である。クラスターを抜け出す粒子の時間間隔はどのフェロモン蒸発率においても $n = 10$ まではほぼ一定で、 $n > 10$ では $n^{1.85}$ に比例して増加する傾向が見られた。この結果から、1 時間ステップあたりにクラスターを抜け出す粒子数² $\alpha(n)$ は

$$\alpha(n) = \begin{cases} 20[q + (Q - q)(1 - f)^3] n^{1.85} & (n > 10) \\ (q + (Q - q)(1 - f)^3)/2 & (n \leq 10) \end{cases} \quad (2)$$

と表すことが出来る。

¹ 粒子が一方方向にしか動かない場合も同様である [9]。

² クラスターを抜け出す粒子の時間間隔の逆数

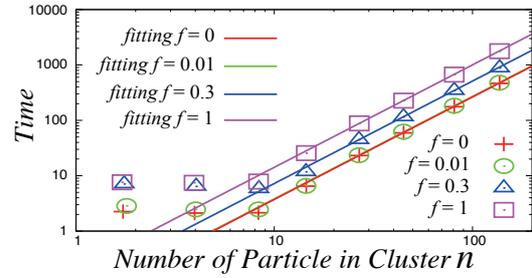


図 5: クラスター内にある粒子数 (横軸) とクラスターを抜け出す粒子の時間間隔 (縦軸) の関係。シミュレーション結果は、フェロモン蒸発率 f が 0 は赤の + で、0.01 は緑の ○ で、0.3 は青の Δ で、1 は紫の □ でプロットしている。

次に、粒子がクラスターを抜け出してから戻ってくるまでに必要な時間を考える。ただし今回は簡単のために、(1) クラスターは 1 箇所のみ形成される (クラスター内の粒子数 $n: 1 \rightarrow n \rightarrow N$)、(2) クラスター外では粒子は一樣に分布している、という 2 つの仮定を取り入れた。クラスターの中にある粒子数が n のとき、クラスター外を移動してクラスターに戻ってくるのに必要な時間はクラスター内の粒子数 $n \cdot$ 道路長 $L \cdot$ 粒子の平均移動速度 v を用いて

$$\frac{L - \frac{n}{2}}{v} = \frac{2L - n}{2v} \quad (3)$$

と表すことができる³。従って単位時間あたりにクラスター外から戻ってくる粒子数は全粒子数 N を用いて

$$\frac{2v(N - n)}{2L - n} \quad (4)$$

となる。平均速度 v については、これまでの研究結果 [12] から $f = 0$ のときのみ $v = Q$ とし、 $f = 0.01, 0.3, 1$ の場合は $v = q$ とした。

以上の結果・導出から、クラスターに含まれる粒子数 $n_t (1 \rightarrow n_t \rightarrow N)$ の時間発展は次式 (5) のように表される。

$$n_{t+1} - n_t = \frac{2v(N - n_t)}{2L - n_t} - \alpha(n_t) \quad (5)$$

ここで、(5) 式を n_t に関する離散力学系と見ると、 $f = 0$ 及び $f = 0.3$ の場合に全粒子数 N に対するクラスター内にある粒子数の固定点 $n^* (n_{t+1} = n_t$ となる点) は図 6 の関係で表される。ただし、点線部は不安定な固定点、実線部は安定な固定点で、 $L = 500, Q = 0.95, q = 0.25$ とした。図 6 から、いずれのフェロモン蒸発率に対しても (f に依存した) ある密度 N_f でサドル-ノード分岐が起こる。各 N に対する安定点は、 $f = 0$ の場合は赤線の分岐から上側 (実線部)、 $f = 0.3$ の場合は青線の分岐から上側 (実線部)

³ 車線数が 2 の場合。

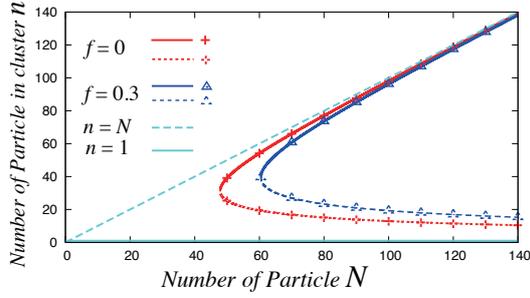


図 6: $f = 0$ (赤の+) 及び $f = 0.3$ (青の Δ) の場合の全粒子数 N に対するクラスター内にある粒子数の固定点 n^* ($n_{t+1} = n_t$ となる点) の変化。 $1 \leq n \leq N$ 。

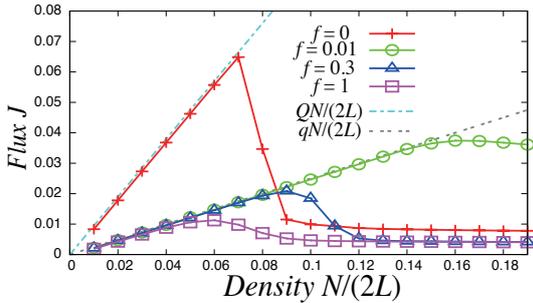


図 7: 粒子密度 $\rho (= N/(2L))$ (横軸) と Langevin 方程式を用いた数値計算結果から導出された流量 $v(N - \langle n_t \rangle)/(2L)$ (縦軸) の関係。 $f = 0$ の場合は $v = Q$ 、 $f = 0.01, 0.3, 1$ の場合は $v = q$ とした。フェロモン蒸発率 f が 0 は赤で、0.01 は緑で、0.3 は青で、1 は紫でプロットしている。

部)に加え、 $n = 1$ である。また、 $f = 0$ での分岐点より $f = 0.3$ での分岐点の方が N が大きいことが分かる。式 (5) の右辺にノイズ項 (Gaussian-White noise) を加えた式

$$n_{t+1} - n_t = \frac{2v(N - n_t)}{2L - n_t} - \alpha(n_t) + \xi(t) \quad (6)$$

$\langle \xi(t) \rangle = 0, \langle \xi(t) \xi(s) \rangle = 2\Gamma \delta(t - s)$

を用いて、初期時刻におけるクラスターに含まれる粒子数 n_0 を 1 から N の区間でランダムに設定し、時間が 10^8 ステップ経過した際の n_t の時間平均 ($\langle n_t \rangle$) を調べた。

得られた結果と現在までの研究結果 (図 3) との比較のために、密度 $N/(2L)$ と流量 $v(N - \langle n_t \rangle)/(2L)$ の関係をプロットした基本図が図 7 である。ただし、 $L = 500$ 、 $Q = 0.95$ 、 $q = 0.25$ 、 $\Gamma = 0.245$ とした。図 3 と比較すると、 $f = 0, 0.3, 1$ に関しては細かな数値は異なるものの定性的には再現出来ている。そのため流量が有限の値を保つ。 $f = 0.01$ に関しては全体的に流量が増加し、かなり異なった結果となったが、これは $f = 0.01$ の場合にはクラスター化が起りやすく、クラスターを抜け出してから戻ってくるまでの時間を導出する際の仮定 (1)(2) が破綻し

ていることに起因している。また、ノイズによって、 n_t が大きい場合ではゆらぎが大きく、また安定点も $n^* < N$ であることから、どのフェロモン蒸発率に対して高密度領域では完全に流量が落ちきらず、有限の値を保つ。

v. まとめと考察

走化性を考慮した準一次元交通流におけるクラスター内の粒子数の成長・減衰の Langevin 方程式を導入し、解析を行った。クラスターから抜け出す粒子数は先行研究のモデルを用いて計測し、クラスターに入る粒子数は理論的に求めた。その結果、確率セルオートマトンモデルでの解析時において、クラスター化が維持されにくいフェロモン蒸発率 ($f = 0, 0.3, 1$) の場合は、先行研究の結果と同様の基本図が得られた。しかし、クラスター化しやすいフェロモン蒸発率 ($f = 0.01$) の場合には、仮定が破綻しているため、先行研究とは異なった結果が得られた。

今後はクラスター化しやすいフェロモン蒸発率の場合の解析を進めていく必要がある。また、今回は先行研究の結果から移動速度を $f = 0$ の場合では $v = Q$ 、それ以外の場合では $v = q$ と直接与えたが、この移動速度に関しても uni-directional Ant-traffic model[9] で考えられているような方法などで、今後詳細に検討する必要がある。

- [1] D. Helbing: Rev. mod. Phys. **73** (2001) 1067
- [2] B. S. Kerner, and H. Rehborn: Phys. Rev. Lett. **79** (1997) 4030
- [3] A. Awazu: J. Phys. Soc. Jpn: **67** (1998) 1071
- [4] D. Chowdhury: Phys. scr. **T106** (2003) 13
- [5] W. Dahui, W. Ziqiang, and F. Ying: Phys. Rev. E **76** (2007) 016105
- [6] S. Hoogendoorn, and P. H. L. Bovy: Optim. Control Appl. Meth. **24** (2003) 153
- [7] C. Burstedde, K. Klauck, A. Schadschneider, and J. Zittartz: Physica A **295** (2001) 507
- [8] H. Kuang, X. Li, T. Song, and S. Dai: Phys. Rev. E **78** (2008) 066117
- [9] A. Kunwar, A. John, K. Nishinari, A. Schadschneider, and D. Chowdhury: J. Phys. Soc. Jpn. **73** (2004) 2979
- [10] A. Kunwar, D. Chowdhury, A. Schadschneider, and K. Nishinari: J. Stat. Mech. (2006) P06012
- [11] 藤井雅史, 西森拓, 粟津暁紀: 第 14 回交通流シンポジウム講演集 (2008) 93
- [12] M. Fujii, A. Awazu, and H. Nishimori: J. Phys. Soc. Jpn. **78** (2009) 073801