

# 最適速度モデルから得られるセルオートマトンモデルについて

金井政宏<sup>1</sup>, 磯島伸<sup>2</sup>, 西成活裕<sup>3</sup>, 時弘哲治<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 東京大学大学院数理科学研究科

<sup>2</sup> 青山学院大学理工学部

<sup>3</sup> 東京大学先端科学技術研究センター

## 概要

本講演で、我々は最適速度モデルより導かれた交通流のセルオートマトンモデルについて発表する。最適速度モデルは微分方程式により定義されている交通流の基本的なモデルであり、一様流がある条件下で不安定化する現象が知られている。一方、この線形不安定性の臨界点において、最適速度モデルから弱非線形解析により mKdV 方程式が得られることが指摘されている。この mKdV 方程式は、ソリトン方程式の一つで、超離散化法によりソリトンセルオートマトンに変換される。よって、この方法を模倣して超離散最適速度モデルを構成する。

## A cellular-automaton model derived from the optimal velocity model

Masahiro Kanai<sup>1</sup>, Shin Isojima<sup>2</sup>, Katsuhiro Nishinari<sup>3</sup> and Tetsuji Tokihiro<sup>1</sup>

*Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo Department of Physics and Mathematics, Aoyama Gakuin University Research Center for Advanced Science and Technology, The University of Tokyo*

## Abstract

In this article, we propose a cellular-automaton model for traffic flow derived from the optimal velocity model. The optimal velocity model, defined by a differential equations, is one of the most fundamental models for traffic flow, reproducing the instability of a uniform flow. Meanwhile, it is pointed out that the optimal velocity model reduces to the modified Korteweg-de Vries equation at the critical point. The modified Korteweg-de Vries equation is a soliton equation, and by the ultradiscrete method it is transformed into a so-called soliton cellular automaton. We obtain the ultradiscrete optimal velocity model in a similar way.

---

## 1 はじめに

最適速度 (OV) モデルは交通流の基本的なモデルであり、2階微分方程式により定義されている [1]. そして、OV モデルについて様々な拡張が研究されているが、微分方程式により定義されているために、合流など付加的な条件を課すことが難しい。

一方で、Nagel-Schreckenberg モデルに代表されるセルオートマトンによるモデル化は、複雑な交通のシミュレーションに適している [2, 3]. そこで、本研究では、OV モデルの特徴である一様流の不安定性 [1]、さらには対流不安定性 [4] などを受け継ぐセルオートマトンモデルを構成する。このためには、以下で見るように、既に指摘されていたソリトン方

方程式との結びつきが重要な役割を果たす [5].

## 1.1 交通流モデル

### 1.1.1 Delay optimal velocity model

まず、時間に関する差分化を行うために、1階微分1階差分方程式であって、ある近似でOVモデルに帰着される、交通流研究の初期にNewellにより導入されたモデルを提示する [6, 7]:

$$\dot{x}_n(t + \tau) = F(h_n(t)) \quad (h_n(t) = x_{n+1}(t) - x_n(t)) \quad (1)$$

ここではDelay Optimal Velocity (dOV)モデルと呼ぶことにする。 $F(\cdot)$ は最適速度関数と呼ばれる、車間距離に対して最適な速度を返す関数である。 $\tau$ はドライバーの反応の時間遅れを表す定数である。 $x_n(t)$ は $n$ 番目の車の位置を、 $h_n(t)$ は車間距離をそれぞれ表している。また、このモデルについては、戸田格子との対応などから、楕円関数解が存在することが知られている [7, 8, 9].

#### 1.1.2 最適速度モデル

dOVモデルは以下のようにOVモデルに帰着される。すなわち、左辺を、 $\tau$ が小さいものとして展開することによりOVモデル [1]

$$\dot{x}_n(t) = \alpha[F(h_n(t)) - \dot{x}_n(t)] \quad (2)$$

が得られる。ここで、 $\alpha = 1/\tau$ という対応がある。以降、 $F(h) = \tanh(h - c) + \tanh c$  ( $c$ は定数)のみを考える。

## 1.2 ソリトン方程式

### 1.2.1 mKdV方程式

OVモデルについて、車間距離 $b$ の一樣流が不安定化する臨界点 $(\alpha, b) = (2, c)$ で適当なスケール変換を行うことによりmKdV方程式

$$b_T = b_{XXX} - (b^3)_X \quad (3)$$

が得られることが知られている [5]. ただし、添え字はその変数による偏微分を表す。具体的なスケール変換は、 $\epsilon$ をスケールパラメータとして、

$$\alpha = 2(1 - \epsilon^2), \quad h_n = c + \sqrt{-2\epsilon b}(X, T), \quad (4)$$

$$X = 2\epsilon(n - t), \quad T = 4\epsilon^3 t/3 \quad (5)$$

である。mKdV方程式は基本的なソリトン方程式の一つで、キंक解と呼ばれる衝撃波解を有する [10].

### 1.2.2 超離散化

ソリトン方程式は $N$ ソリトン解と呼ばれる厳密解の系列や無限個の保存量を持つ偏微分方程式である。そして、ソリトン方程式からこの特質を受け継ぐセルオートマトン (いわゆるソリトンセルオートマトン) を構成する方法として超離散化と呼ばれる手続きがある [11].

ここで、mKdV方程式の超離散化について簡単に触れる [12]. まず、独立変数が離散化されたmKdV (fdmKdV) 方程式

$$v_j^{t+1}(1 + \delta v_{j+1}^{t+1}) / (1 + a v_j^{t+1}) = v_j^t(1 + \delta v_{j-1}^t) / (1 + a v_j^t) \quad (6)$$

から始める [13].  $t$ と $j$ は離散化された時間および空間の変数で、 $\delta$ と $a$ は実数のパラメータである。ここで、 $v_j^t = r_j(-\delta t)$ とおいて $\delta \rightarrow 0$ の極限を取ると、時間が連続化された方程式

$$\dot{r}_j = r_j(1 + a r_j)(r_{j+1} - r_{j-1}), \quad (7)$$

を得る。この方程式は変形Lotka-Volterra (mLV)方程式と呼ばれている。ここで、 $r_j = -1/(2a) + \sqrt{-1}\epsilon s(X, T)$ ,  $X = (j - t/(2a))\epsilon$ ,  $T = \epsilon^3 t/3$ として $\epsilon \rightarrow 0$ の極限を取ることにより $s(X, T)$ に対するmKdV方程式が得られる。

従属変数の離散化は次の公式により行われる:

$$\epsilon \log(\exp(A/\epsilon) \cdot \exp(B/\epsilon)) = A + B,$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \epsilon \log(\exp(A/\epsilon) + \exp(B/\epsilon)) = \max\{A, B\} \quad (8)$$

mKdV方程式の超離散化は(若干の変数変換を挟むことにより)

$$\begin{aligned} V_j^{t+1} + \max(0, V_{j+1}^{t+1} - D) - \max(0, V_{j+1}^{t+1} - A) \\ = V_j^t + \max(0, V_{j-1}^t - D) - \max(0, V_{j-1}^t - A) \end{aligned} \quad (9)$$

となる。ただし、 $0 < D < A$ としている。

ここで、dOVモデルとmLV方程式の関係について述べる。車間距離 $h_n$ の表示 $\dot{h}_n(t + \tau) = F(h_{n+1}(t)) - F(h_n(t))$ から変数変換 $G(\phi) = \tanh(h_n - c)$  ( $\phi = t + 2n\tau$ )を施すことにより

$$G'(\phi) = (1 - G^2(\phi))(G(\phi + \tau) - G(\phi - \tau)) \quad (10)$$

を得る。簡単な従属変数の変換を施すことによって、この式はmLV方程式において進行波を仮定したものと同じである。以上から、dOVモデルとmLV方程式は進行波を仮定すると同一の方程式で表される。(さらに、この方程式は楕円関数解を持つ。)

### 1.3 超離散最適速度モデル

以上で見たように、微分方程式を超離散化する場合、まず時間と空間の差分化が必要となる。OV モデルは時間に関して2階微分であるから、dOV モデルを経由することは、dOV モデルと mLV 方程式の関係を見ても妥当であろう。

従って、dOV を差分化することにより得られる方程式

$$\begin{aligned} & ((1 - 2\tau)/\tau)(u_n^{t+1} - u_n^t) \\ & = (1 - u_n^t)(1 + u_n^{t+1})u_{n+1}^t - (1 - u_n^{t+1})(1 + u_n^t)u_n^{t-1} \end{aligned} \quad (11)$$

をさらに超離散化して超離散最適速度 (udOV) モデル

$$\begin{aligned} & H_n^{t+1} + \max(0, H_{n+1}^t - S) - \max(0, H_{n+1}^t - C) \\ & = H_n^t + \max(0, H_{n+1}^{t-1} - S) - \max(0, H_{n+1}^{t-1} - C). \end{aligned} \quad (12)$$

を得る。ただし、超離散化後の変数およびパラメータは  $u_n^t = \tanh[(H_n^t - C)/(2\epsilon)]$ ,  $S = C + T$ ,  $\tau = (1 - \exp(-T/\epsilon))/4$ ,  $c = \exp(-C/\epsilon)$  となっている。

## 2 シミュレーションの結果

ここでは、udOV モデルのシミュレーションの結果を示す。初期条件として、時刻  $t = -1$  のときに一様流 (車間距離を  $h$  とする) であった状態に時刻  $t = 0$  で先頭部に小さな擾乱を加えその伝播状況を観測する。パラメータの値は実測を元にして  $C = 4$ ,  $T = 3$  とした [14]。すなわち、車の長さ 5m,  $a = 2\text{s}^{-1}$ , 最適速度関数の変曲点 (20m, 15m/s) とする。車の台数  $N = 100$  で、時刻  $t = 200$  までとし、先頭の 10 台の車間距離に  $\pm 1$  の擾乱を加える。

図 1 に後の方から選ばれた車の車間距離の時間変化を図示する。初期一様流の車間距離  $h$  の値によって時間発展の様子が異なる：(a)  $h = 4$ 。途中で車間距離が大きく開く時間帯があり、その後再び車間距離が小さくなり安定化する。(b)  $h = 6$ 。前方の渋滞に追いつき、その後振動を繰り返す。いわゆる stop-and-go 状態になる [15]。(c)  $h = 7$ 。擾乱が大きな渋滞に発達し、後方に伝播していくが、孤立波のようにやがて遠ざかる。これは対流不安定状態として連続の OV モデルについても観測されている [4]。

## 3 まとめ

本研究では、最適速度モデルから超離散化により得られるセルオートマトンモデルについて考察した。

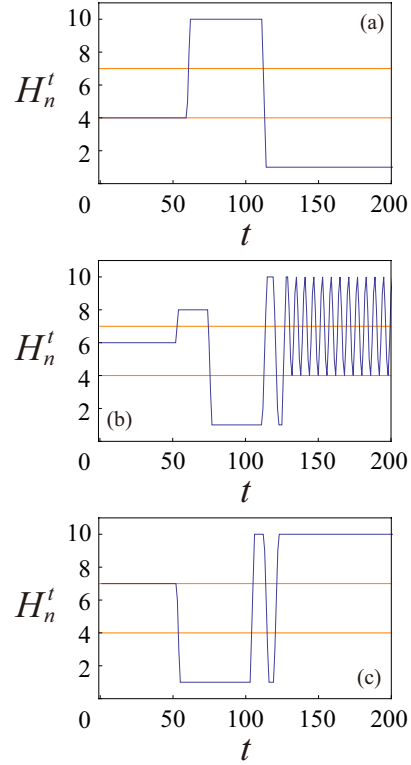


図 1: (a)  $h = C = 4$ ,  $n = 40$ , (b)  $h = C + T - 1 = 6$ ,  $n = 40$  and (c)  $h = C + T = 7$ ,  $n = 30$ .

シミュレーションにより、連続の OV モデルに見られる一様流の線形不安定性および対流不安定性を再現していることが分かった。これにより、臨界点での OV モデルと mKdV 方程式の対応から出発して構成した超離散最適速度モデルが、この点に限らず OV モデルの特質を継承していることが示された。

超離散 mKdV 方程式について、mKdV 方程式と同様にソリトン解が存在することが示されている [12]。そして、超離散 OV モデルについても、これに類似した衝撃波解が得られている [16]。

今回の結果では車間距離表示が得られたが、これを車の位置表示に変換しようとすると幾つかの困難が生じる。この点については次の機会に発表したい。

## 参考文献

- [1] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata, and Y. Sugiyama, Phys. Rev. E **51**, 1035 (1995).
- [2] K. Nagel and M. Schreckenberg, J. Phys. I (France) **2**, 2221 (1992).

- [3] D. Chowdhury, L. Santen, and A. Schadschneider, *Phys. Rep.* **329**, 199 (2000).
- [4] N. Mitarai and H. Nakanishi, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 1766 (2000).
- [5] T. S. Komatsu and S. Sasa, *Phys. Rev. E* **52**, 5574 (1995).
- [6] G. F. Newell, *Oper. Res.* **9**, 209 (1961).
- [7] G. B. Whitham, *Proc. R. Soc. Lond. A* **428**, 49 (1990).
- [8] Y. Igarashi, K. Itoh, and K. Nakanishi, *J. Phys. Soc. Jpn.* **68**, 791 (1999).
- [9] K. Hasebe, A. Nakayama, and Y. Sugiyama, *Phys. Lett. A* **259**, 135 (1999).
- [10] R. M. Miura, *J. Math. Phys.* **9**, 1202 (1968), and the sequels.
- [11] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira, and J. Satsuma, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 3247 (1996).
- [12] D. Takahashi and J. Matsukidaira, *J. Phys. A* **30**, L733 (1997).
- [13] S. Tsujimoto and R. Hirota, *RIMS Kokyuroku* **933**, 105 (1995) (in Japanese).
- [14] M. Bando, K. Hasebe, K. Nakanishi, A. Nakayama, A. Shibata, and Y. Sugiyama, *J. Phys. I (France)* **5**, 1389 (1995).
- [15] B. S. Kerner and H. Rehborn, *Phys. Rev. E* **53**, R4275 (1996); *Phys. Rev. Lett.* **79**, 4030 (1997); B.S. Kerner, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3797 (1998).
- [16] M. Kanai, S. Isojima, K. Nishinari and T. Tokihiro, *Phys. Rev. E* **79**, 056108 (2009).