

構造に依存する2次元OV模型の不安定性の比較

石渡龍輔¹, 杉山雄規²

¹ 東京医科歯科大学 医歯学総合研究科 情報生物学専攻

² 名古屋大学 情報科学研究科 複雑系科学専攻

概要

2次元OV模型の定常流解の安定性を4,6角配置で比較した。4角,6角配置毎の安定性の相図を図示し, 数値実験を用いて線形安定性解析の妥当性を確認した。

Array dependent instability of homogenous flow with two-dimensional OV model

Ryosuke Ishiwata¹, Yuki Sugiyama²

¹ Department of Information Biology, Graduate School of Medicine and Dentistry, Tokyo Medical and Dental University

² Department of Complex Systems Science, Graduate School of Information Science, Nagoya University,

Abstract

We investigate the difference of the stability between different packings in the two-dimensional optimal velocity model, analytically. We show the phase diagram, and study the behavior of the flow in hexagonal and square arrangements by numerical simulation.

1 はじめに

生物の細胞内輸送, 生物の集団形成, 交通流などは, 非常に興味深い現象であり, 物理的な方法論を用いた研究が行われている [1]. 鳥や魚の群れなどの集団運動は, 生物学における興味深い問題であると同時に, Swarm Optimization のような工学への応用も考えられており, 既に幾つかのモデルを用いたダイナミクスの研究が行われている [2].

生物の集団形成や集団運動の安定性は, 粒子配置の影響を受けると考えられるため, 配置方法を考慮した安定性の解析が必要だと考えられる. そこで我々は, 2次元OV模型を例として取り上げ, 粒子配置と集団運動の安定性の関係を明らかにすることを目的とした. 2次元OV模型は, 歩行者流や生物の集団運動のダイナミクスを解明するために作られたモデルであり, 数値実験によって集団運動を表すことが確

認されている [3, 4]. 近年, 2次元交通流模型を用いた迷路の解探索等の研究も行われており, 興味深い振る舞いをする事が知られている [5]. また2次元OV模型は, 交通流模型であるOV方程式の2次元拡張となっており, 特定の定常流解の安定性が解析されている. 平面の充填方法には6角形及び4角形による配置方法があり, 6角配置の方が高密度に平面を充填するが, 非対称性を持った模型において, どちらの配置の安定性が高いかは知られていない. これらの構造の安定性の比較は, 多様な構造を持つ集団運動のメカニズムを解明する基礎になると考えた. そして我々は, Nakayama 達によって研究された6角配置の定常流解の安定性解析 [4] に対し, 4角配置の定常流解を元にした安定性解析を行い, 粒子配置と定常流解の安定性の関係を解明する.

2次元 OV 模型の運動方程式は,

$$\ddot{\vec{x}}_j(t) = a \left[\{\vec{V}_0 + \sum_k \vec{F}(\vec{r}_{kj}(t))\} - \dot{\vec{x}}_j(t) \right], \quad (1)$$

$$\vec{F}(\vec{r}_{kj}) = f(r_{kj})(1 + \cos \theta_{kj}) \vec{n}_{kj}, \quad (2)$$

$$f(r_{kj}) = \alpha [\tanh \beta(r_{kj} - b) + c], \quad (3)$$

与えられ、 \vec{x}_j は j 番目の粒子の位置を表わし、 $\vec{r}_{kj} = \vec{x}_k - \vec{x}_j$ は変位ベクトル、 $\vec{n}_{kj} = \vec{r}_{kj}/r_{kj}$ は変位の単位ベクトル、 $r_{kj} = |\vec{r}_{kj}|$ は変位、 θ_{kj} は j 番目の粒子の進行方向と k 番目の粒子の位置がなす角度である。 a は、感応度を表す [4]。 \vec{V}_0 は外力を表わしている。次に線形化解析を行うため、粒子の進行方向を x 方向と設定し、外力 $\vec{V}_0 = (V_0, 0)$ も x 方向だけとする。粒子の進行方向を x と定めるため、角度 θ_{kj} は $\cos \theta = (x_k - x_j)/r_{kj}$ となる。式 (1) は、定常流解

$$(x_j, y_j) = (X_j + v_x t, Y_j + v_y t), \quad (4)$$

$$v_x = V_0 + \sum F_x(X_k - X_j, Y_k - Y_j), \quad (5)$$

$$v_y = \sum F_y(X_k - X_j, Y_k - Y_j), \quad (6)$$

を持ち、 (X_j, Y_j) は j 番目の粒子の初期位置を表わす。定常流解の粒子の 4, 6 角配置は、図 1, 2 である。

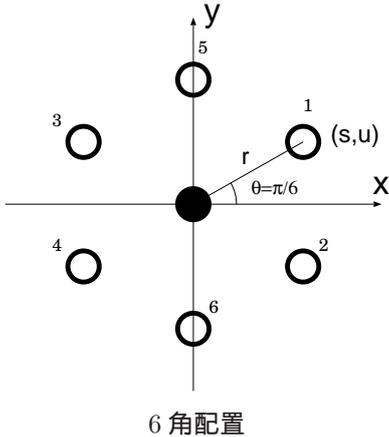


図 1: ある粒子 (●) のまわりに配置される粒子 (○) の 6 角配置による配置図

2 線形化解析

モード解は、波数を k, m として

$$\begin{aligned} x_j &= \epsilon_1 \exp[i\omega t + i(kX_j + mY_j)], \\ y_j &= \epsilon_2 \exp[i\omega t + i(kX_j + mY_j)], \end{aligned} \quad (7)$$

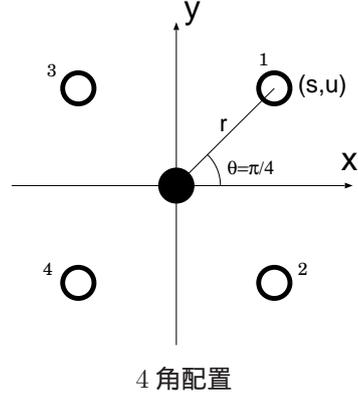


図 2: ある粒子 (●) のまわりに配置される粒子 (○) の 4 角配置による配置図

として表わせる。 (ϵ_1, ϵ_2) は摂動の強さのベクトル。(1) を線形化近似し、モード解を代入して、次の分散関係式を得る:

$$\begin{aligned} -\epsilon_1 \omega^2 &= \epsilon_1 \bar{A} + \epsilon_2 \bar{B} - i\epsilon_1 \omega, \\ -\epsilon_2 \omega^2 &= \epsilon_1 \bar{C} + \epsilon_2 \bar{D} - i\epsilon_2 \omega. \end{aligned} \quad (8)$$

$\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ は、配置毎にそれぞれ求めることができる。分散 $\omega(k, m)$ が負の虚数を持たないことが、モード解の安定条件である。配置間の安定条件を比較するため、 x 方向の縦モード、 x 方向の横モード、 y 方向の縦モード、 y 方向の横モード、楕円モードに対して安定条件を求めた。相図を書くための数値計算は、 $\alpha = 0.25$, $\beta = 2.5$, $b = 1$ として求めている。平均密度 d を平均粒子間距離 r の代わりに用い、2 つの配置についての比較をする。

2.1 x 方向の縦モード

$(\epsilon_1, \epsilon_2) = (\epsilon, 0)$ 及び $m = 0$ を (8) に代入し、分散関係式

$$-\omega^2 = \bar{A} - i\omega, \quad (9)$$

$$\bar{C} = 0, \quad (10)$$

を得る、ただし \bar{A} は、

$$\bar{A} = 2[(A_1 + A_3)(\cos ks - 1)] + 2i[(A_1 - A_3) \sin ks]. \quad (11)$$

条件 $\bar{C} = 0$ は、各配置で $m = 0$ の元で既に満たされている。従って x 方向の縦モードの安定条件は、どちらの配置も同様に

$$a > 4 \frac{(A_1 - A_3)^2}{A_1 + A_3}, \quad (12)$$

2 となる。

2.2 x 方向の横モード

$(\epsilon_1, \epsilon_2) = (0, \epsilon)$ 及び $m = 0$ を (8) に代入し,

$$\bar{B} = 0, \quad (13)$$

$$-\omega^2 = \bar{D} - i\omega, \quad (14)$$

を得る, \bar{D} はどちらの配置も

$$\bar{D} = 2[(D_1 + D_3)(\cos ks - 1)] + 2i[(D_1 - D_3) \sin ks]. \quad (15)$$

条件 $\bar{C} = 0$ は, 各配置で $m = 0$ の元で既に満たされているため, 安定条件はどちらの配置でも同様な形

$$a > 4 \frac{(D_1 - D_3)^2}{D_1 + D_3}, \quad (16)$$

で与えられる.

2.3 y 方向の横モード

$(\epsilon_1, \epsilon_2) = (\epsilon, 0), k = 0$ を (8) に代入し,

$$-\omega^2 = \bar{A} - i\omega, \quad (17)$$

$$\bar{C} = 0. \quad (18)$$

6 角配置の場合の \bar{A}, \bar{C} は

$$\bar{A} = 2[(A_1 + A_3)(\cos mu - 1) + A_5(\cos 2mu - 1)], \quad (19)$$

$$\bar{C} = 2i \sin mu [(C_1 + C_3) + 2C_5 \cos mu]. \quad (20)$$

4 角配置の \bar{A}, \bar{C} は,

$$\bar{A} = 2(A_1 + A_3)(\cos mu - 1), \quad (21)$$

$$\bar{C} = 2i(C_1 + C_3) \sin mu. \quad (22)$$

6 角配置では, (18) と (20) から \bar{C} に対する 2 つの条件が求まる.

1. $\sin mu = 0$.

$(k, m) = 0$ は自明な安定条件であるから, $mu = \pi$ の場合を考える. 安定条件は \bar{A} の式 (17), (19) より

$$A_1 + A_3 > 0. \quad (23)$$

2. $(C_1 + C_3) + 2C_5 \cos mu = 0$

この条件の元では, 安定条件は

$$\bar{A} = \frac{-1}{C_5} [2C_5(A_1 + 2A_5 + A_3) + (A_1 + A_3)(C_1 + C_3) - (C_1 + C_3)^2] < 0. \quad (24)$$

となる

4 角配置では, (18) の成立条件は $mu = \pi$ だけであり, 条件式は 6 角配置の (23) と同じ形の

$$A_1 + A_3 > 0, \quad (25)$$

で与えられる.

2.4 y 方向の縦モード

$(\epsilon_1, \epsilon_2) = (0, \epsilon), k = 0$ を (8) に代入して, 関係式

$$\bar{B} = 0, \quad (26)$$

$$-\omega^2 = \bar{D} - i\omega, \quad (27)$$

を得る. どちらの配置でも $\bar{B} = 0$ を満たすための条件として, $mu = \pi$ が与えられるため, これを \bar{D} に代入することで, 安定条件式

$$D_1 + D_3 > 0, \quad (28)$$

を得る.

2.5 楕円モード

$(\epsilon_1, \epsilon_2) = (1, \epsilon(k, m))$ を (8) に代入し,

$$\bar{B}\epsilon^2 + (\bar{A} - \bar{D})\epsilon - \bar{C} = 0, \quad (29)$$

$$\omega^2 - i\omega + \bar{A} + \epsilon\bar{B} = 0, \quad (30)$$

となる. これらの条件式は, $\epsilon(k, m, r)$ について 2 つの解を持っており, 2 つの解に対応して解 $\omega(k, m, r)$ が 4 つ存在する. しかし, これらの解を直接求めることは困難であるため, k, m が小さいとして長波長近似を行うことで安定条件を求める. ω が負の虚数を持たないことが安定条件であることから, 安定条件

$$(B_1 + B_3)(C_1 + C_3 + 2C_5) > 0, \quad (31)$$

が得られる. 4 角配置についての安定条件

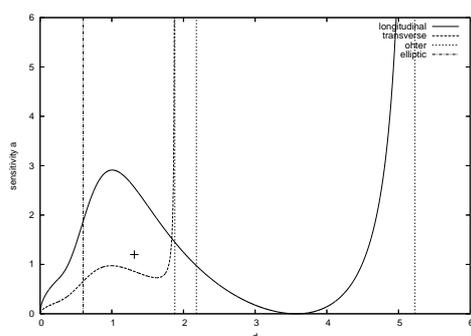
$$(B_1 + B_3)(C_1 + C_3) > 0. \quad (32)$$

を得る.

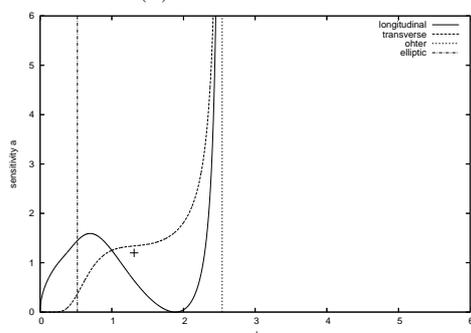
3 相図

図 3 は, 安定条件の臨界曲線と安定領域を示した相図である. 6 角配置 [4] と 4 角配置では安定条件 (24) の有無により, 安定領域を与える臨界直線の数が異なっている. この条件の差は, y 軸上の 5, 6 粒子の存在に依存している.

次に求められた線形化解析の結果を数値実験を用いて確認した。線形化解析によって、6角形配置が x 方向の縦モード、4角形配置が x 方向の横モード不安定であるパラメーターに対して数値実験を行った。数値実験の不安定となり始める時点の粒子の振る舞いが図4の(a)と(b)である。利用したパラメーターは、 $c = 0.0, d = 1.31, a = 1.2$ であり、6角配置の振る舞いは、図4(a)であり、 x 方向の縦モード不安定に対応した x 方向の縦波が確認できる。4角配置の図4(a)では、 x 方向の横モード不安定に対応した x 方向の横波が確認できる。



(a) 6角配置 $c=0.0$

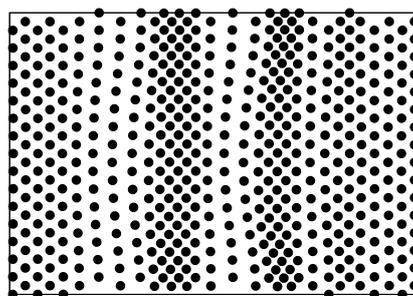


(b) 4角配置 $c=0.0$

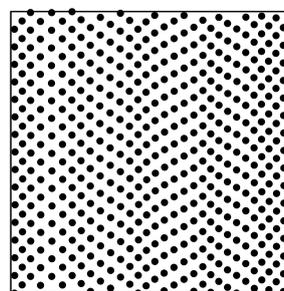
図3: $c=0.0$ に対する各配置の数値実験。曲線は x 方向の縦、横モードの臨界曲線を表している。点線は y 方向の臨界直線を表わしている、点鎖線が楕円モードの臨界直線を表わしている。(a) 6角配置、(b) 4角配置。“+”は、数値実験で用いたパラメーターを表わしている。

4 考察

6角配置は、4角配置に比べて密度 $d = 1.0$ 付近における x 方向の縦モードの不安定性領域が広い、それに対し x 方向の横モードの不安定領域は、6角配置より4角配置の方が広がっている。これは、1, 2, 3, 4番の粒子の中心粒子に対する相対的な配置の影響を反映した結果である。これに対し、 y 方向のモード不安定性は、6角配置における図1の5, 6粒子の影響を受ける。その影響のため6角配置は、4角配置に比べ



(a) 6角配置



(b) 4角配置

図4: $c=0.0$ で図3の“+”をパラメーターとしたときの振る舞い。(a)6角配置、(b)4角配置

1つ多く不安定条件を有しており、臨界直線が4角配置より多く与えられる。また、6角配置と4角配置で線形化解析に特徴的な差が出ているパラメーターでシミュレーションを行ったが、その結果からも線形化解析によって得られた配置による x 方向の縦モードと横モードの不安定領域の広さの違いが確認できる。したがって定常流の安定性は、粒子配置に質的に依存している。そのため、最密と考えられていた6角配置と、4角配置に定常流の安定性としての優劣を決定できない。したがって、それぞれの粒子が局所的に定常流解を持つように配置された構造についての定常流解の安定性を議論するためには、それぞれの粒子に対して局所構造の安定性を調べるしかないと考えられる。

また、現実の魚群などを考えた場合、個体の視覚が群れの構造に強い影響を及ぼしていると考えられる。そこで、集団運動のモデル方程式である式(1)において視覚対応する項 $(1 + \cos \theta_{kj})$ が、どのように集団運動の安定性に影響を与えているのかを解明することも今後の課題である。

参考文献

- [1] N.Waldau, P.Gattermann, H.Knoflachner, M.Schreckenberg, *Pedestrian and Evacuation Dynamics 2005* (2007).
- [2] N. Sannomiya and K. Matuda, *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.*14, 157 (1984).
- [3] A. Nakayama, K. Hasebe, and Y. Sugiyama, *Phys. Rev. E* 71, 036121 (2005).
- [4] A. Nakayama, K. Hasebe, and Y. Sugiyama, *Phys. Rev. E* 77, 016105 (2008).
- [5] 衣川亮太, 大島吉雄, ポスター発表 P11, 第15回創発システム・シンポジウム