Swarm oscillators モデルのネットワークへの拡張

山岡寛和 [1,2], 巌佐正智 [1], 田中ダン [1,3]

[1] 名古屋大学 大学院情報科学研究科 複雑系科学専攻
[2] 福井大学 大学院工学研究科 知能システム工学専攻
[3] 科学技術振興機構 戦略的創造研究推進事業 個人型研究 さきがけ
「数学と諸分野の協働によるブレークスルーの探索」第一期研究員兼任

概要

自己駆動型結合振動子系の 1 つである swarm oscillators(SO) モデルを拡張し、その特徴を発見する事を目的とする。拡張モデルの一例と、3 体、位置固定という条件での解析結果を紹介する。解析から、特定の条件下では、拡張モデルのダイナミクスが 1 次元 SO モデルのダイナミクスで記述できる事が判明した。

Extension to Network Model of Swarm Oscillators

Hirokazu Yamaoka[1,2], Masatomo Iwasa[1], Dan Tanaka[1,3]

[1] Department of Complex Systems Science, Graduate School of Information Science, Nagoya University
[2] Department of Human and Artificial Intelligent Systems, Graduate School of Engineering, University of Fukui
[3] Precursory Research for Embryone Science and Technology (PRESTO), Japan Science and Technology Agency (JST)

Abstract

The purpose of this study is to find some features of an extended model of ‘swarm oscillators model’. In this study, we present an example of the extended model and show some results of analysis under the condition that three particles are fixed spatially. As a result of the analysis, we obtained the fact that if the specific requirements are fulfilled, the dynamics of the model is equivalent to that of the one-dimensional ‘swarm oscillators model’.

1 はじめに

個人の相互作用の総体として社会や世界があり、個人の思惑や行動からは想像できないような集団的な振舞いが出てくる事がある。人間だけでなく、原子は、互いに引きつけ合ったり反発し合ったりする相互作用の結果、モノ (物質) をなし、10 億から 1000 億個もある脳の中のニューロンの相互作用から記憶や感情などの高次機能が出てくる。これらシステムのダイナミクスを理解する際には、局所的な構造の理解のみならず、ネットワーク構造全体を理解する必要がある。

ネットワークが全体としてどのような構造をしているのかは自明ではない。例えば、インターネットや脳の構造が少なくとも囲碁盤のような規則的な格子状の結合でない事は容易に想像できる。しかし、その複雑なネットワーク構造は比較的単純な原理からできており、複雑さの中に規則性や機能がある事が近年わかってきた [1, 2]。

ネットワークにおける、個々の要素を振動子でモデル化するアプローチがある。そこで本稿では、実空間における自己駆動型結合振動子系の 1 つである swarm oscillators モデル [3, 4, 5] を、実空間を含むより広い空間に埋め込み、実空間の swarm oscillators モデルにはない特徴を見付ける事を目的とする。以下に拡張モデルの一例と解析結果を紹介する。

2 モデル

2.1 Swarm oscillators モデル

素子内自由度と素子間相互作用とが動的に相互作用する一般の状況を考え、素子内ダイナミクスにリミットサイクル振動、素子間相互作用に拡散場を用いた走化性リミットサイクル集団系のモデルが提案されている。Swarm oscillators モデル (以後、本稿においては SO モデルと表記する。) は、この前提モデルに中心多様体縮約法、位相縮約法を適用し、導出

された。

$$\dot{\psi}_i(t) = \sum_{\{j|j\neq i\}} e^{-|\boldsymbol{R_{ji}}|}\sin(\Psi_{ji}+\alpha|\boldsymbol{R_{ji}}|-c_1), \quad (1)$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}}(t) = c_3 \sum_{\{j|\boldsymbol{R_{ji}}\neq 0\}} \hat{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{ji}} e^{-|\boldsymbol{R_{ji}}|} \times \sin(\Psi_{ji}+\alpha|\boldsymbol{R_{ji}}|-c_2). \quad (2)$$

$\psi_i(t)$ が素子 i の内部状態、$\boldsymbol{r_i}(t)$ が素子 i の空間位置を示す。また、$\boldsymbol{R_{ji}} \equiv \boldsymbol{r_j}-\boldsymbol{r_i}$、$\hat{\boldsymbol{R}}_{\boldsymbol{ji}} \equiv \boldsymbol{R_{ji}}/|\boldsymbol{R_{ji}}|$、$\Psi_{ji} \equiv \psi_j - \psi_i$ である。SO モデルは、素子数密度とパラメータ c_1、c_2、c_3、α を変える事によって、非自明な集団運動やパターンを創発する。

2.2 SO モデルのネットワークへの拡張

SO モデルは、実空間内を素子が駆動するモデルである。SO モデルをネットワーク上のモデルに拡張したい。この場合、素子が存在する空間は実空間である必要はない。実空間を含む、より広い空間に埋め込まれた SO モデルをネットワークモデルとして考え、実空間の SO モデルにはない特徴を探るという事である。

多素子の複雑な状況を解析するのは困難なため、比較的単純な状況から解析していきたい。従って、本稿では、素子を 3 体に絞り、位置を固定し ($c_3 = 0$)、位相のみのダイナミクスを観察する。

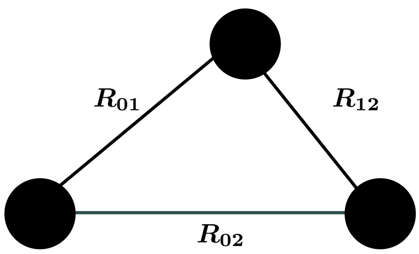

Fig.1: 3 素子の配置の一例

実空間においては、3 素子の距離の関係は次の式 (3) で表されるが、式 (4) は実空間では成り立たない。

$$|\boldsymbol{R_{01}}|+|\boldsymbol{R_{12}}| \geq |\boldsymbol{R_{02}}|, \quad (3)$$

$$|\boldsymbol{R_{01}}|+|\boldsymbol{R_{12}}| < |\boldsymbol{R_{02}}|. \quad (4)$$

意図的に式 (4) のような関係を作るためパラメータ a を導入し、以下のような定義をする。

$$|\boldsymbol{R_{01}}| \equiv l_1, \quad (5)$$

$$|\boldsymbol{R_{12}}| \equiv l_2, \quad (6)$$

$$|\boldsymbol{R_{02}}| \equiv (l_1+l_2)a, \quad (7)$$

$$l_1, l_2, a > 0.$$

パラメータ $a > 1$ の時、実空間では存在しない状態になり、$a = 1$ の時、素子は 1 次元的に配置され、1 次元空間における SO モデルと同様な状態になる。また、$a < 1$ の時は、3 つの素子が 2 次元空間で三角形を構成し、Fig.1 のような状態となる。ただし、$l_1/(l_1+l_2) > a,\ (l_1 > l_2)$ または $l_2/(l_1+l_2) > a,\ (l_2 > l_1)$ の時、$(l_1+l_2)a > |l_2 - l_1|$ の関係を満たさない場合も実空間には存在しない状態である。

3 解析

3.1 変数変換

式 (5)〜(7) の関係を用いて、3 体 SO モデルの式を書くと、

$$\dot{\psi}_0(t) = e^{-l_1}\sin(\Psi_{10}+\alpha l_1 - c_1) + e^{-(l_1+l_2)a}\sin(\Psi_{20}+\alpha(l_1+l_2)a - c_1), \quad (8)$$

$$\dot{\psi}_1(t) = e^{-l_1}\sin(\Psi_{01}+\alpha l_1 - c_1) + e^{-l_2}\sin(\Psi_{21}+\alpha l_2 - c_1), \quad (9)$$

$$\dot{\psi}_2(t) = e^{-l_2}\sin(\Psi_{12}+\alpha l_2 - c_1) + e^{-(l_1+l_2)a}\sin(\Psi_{02}+\alpha(l_1+l_2)a - c_1). \quad (10)$$

となる。ここで、

$$t' = e^{(l_1+l_2)a}t, \quad (11)$$

$$b_1 \equiv (l_1+l_2)a - l_1, b_2 \equiv (l_1+l_2)a - l_2, \quad (12)$$

$$c \equiv \frac{\alpha}{2}(l_1+l_2) - c_1. \quad (13)$$

という変数変換を行うと、

$$\dot{\psi}_0(t) = e^{b_1}\sin(\Psi_{10}+\frac{\alpha}{2}(b_2-b_1)+c) + \sin(\Psi_{20}+\alpha b_1+\frac{\alpha}{2}(b_2-b_1)+c), \quad (14)$$

$$\dot{\psi}_1(t) = e^{b_1}\sin(\Psi_{01}+\frac{\alpha}{2}(b_2-b_1)+c) + e^{b_2}\sin(\Psi_{21}-\frac{\alpha}{2}(b_2-b_1)+c), \quad (15)$$

$$\dot{\psi}_2(t) = e^{b_2}\sin(\Psi_{12}-\frac{\alpha}{2}(b_2-b_1)+c) + \sin(\Psi_{02}+\alpha b_1+\frac{\alpha}{2}(b_2-b_1)+c). \quad (16)$$

となる。

l_1、l_2、a を変化させて 3 素子の位相の振舞いを観察するのだが、式 (12) と式 (14)〜(16) に注目すると、b_1、b_2 は l_1、l_2、a で決まると言える。従って、$a > 1$ または $a < 1$ の時、l_1、l_2 の値を調節して、$a = 1$ で同値の b_1、b_2 を得る事ができ、式 (14)〜(16) は $a = 1$ とそれ以外の時で、全く同じ式になる。結局、実空間には存在し得ない状態も式 (11)〜(13) の変数変換を用いると、実空間に存在する状態に変換できる。ただし、$a = 1$ の状態で l_1、l_2 が負になってしまう場合があるため、$a = 1$ の状態で必ず記述できるとは限らない。その条件は後節で述べる。

3.2　b_1 と b_2 に関する保存曲線

b_1 と b_2 が同値になるような l_1、l_2、a の組合せは何通りもある。b_1 と b_2 が共に保存するような曲線を式 (12) から得る。$b_1+b_2=(2a-1)(l_1+l_2)$ より、

$$\begin{cases} b_1+b_2<0 & (a<\frac{1}{2}), \\ b_1+b_2=0 & (a=\frac{1}{2}), \\ b_1+b_2>0 & (a>\frac{1}{2}). \end{cases} \tag{17}$$

という関係がわかる。また、$b_1+b_2=(2a-1)(l_1+l_2)$ を a と l_1、a と l_2 それぞれについて解くと、

$$a=\frac{b_1+b_2}{2\{2l_1+(b_1-b_2)\}}+\frac{1}{2}, \tag{18}$$

$$a=\frac{b_1+b_2}{2\{2l_2+(b_2-b_1)\}}+\frac{1}{2}. \tag{19}$$

となる。漸近線は、

$$\begin{cases} a=\frac{1}{2}, \\ l_1=\frac{b_2-b_1}{2}, \\ l_2=\frac{b_1-b_2}{2}. \end{cases} \tag{20}$$

となる。

以上から、b_1 と b_2 の保存曲線は、l_1、l_2、a 空間では双曲線で表され、式 (17) より a の値によって、双曲線の符号が変わる。そして、$l_1=-l_2$ の面に全ての保存曲線は漸近する事がわかる (Fig.2)。

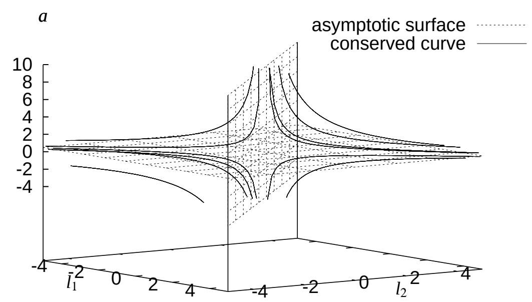

Fig.2: b_1 と b_2 が共に保存する曲線

3.3　1 次元 SO モデルで記述できる条件

前節の結果より、b_1 と b_2 の保存曲線上に乗っている $a>1$ のダイナミクスは、$a=1$ のダイナミクスで記述できると言える。ただし、$1>a>0.5$ の領域では、$a=1$ のダイナミクスで必ず記述できるとは限らない。なぜなら、$a=1$ のダイナミクスで記述した時に l_1、l_2 のどちらか、もしくは両方が負になる場合があるからだ。Fig.3、4 において、白い領域が、それぞれ $a=0.6$、$a=0.7$ のダイナミクスを $a=1$ のダイナミクスで記述した時 l_1、l_2 が共に正になる領域を示している。$a=1$ から徐々に a を減少させると、この l_1、l_2 が共に正になる領域が狭まっていき、$a=0.5$ で完全になくなる。これは式 (12) からわかる。

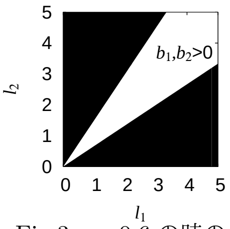

Fig.3: a=0.6 の時の b_1、b_2

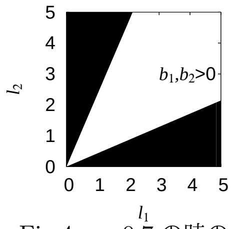

Fig.4: a=0.7 の時の b_1、b_2

また、$a\leq 0.5$ の時は、b_1 と b_2 の保存曲線が $a=1$ の領域に交わらないため、$a=1$ のダイナミクスで記述する事ができない。しかし、実は 1 次元 SO モデルに一致する素子の配置は $a=1$ の場合だけではない。式 (21)、Fig.5 のような場合も 1 次元 SO モデルに一致する。

$$|l_1-l_2|=a(l_1+l_2) \tag{21}$$

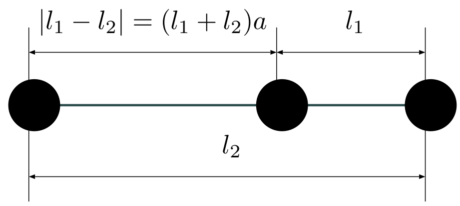

Fig.5: $a=1$ 以外の素子の 1 次元的配置

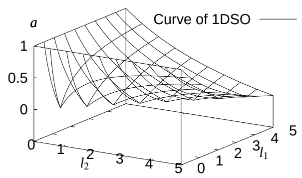

Fig.6: a=1 以外で、素子が 1 次元的配置になる面

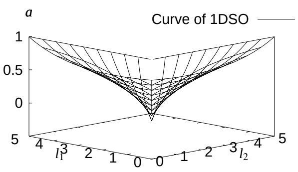

Fig.7: a=1 以外で、素子が 1 次元的配置になる面 (別アングル)

従って、b_1 と b_2 の保存曲線が式 (21) で表される面に交わるようなら (Fig.6、7)、1 次元 SO モデルで記述できる。

3.4　素子のダイナミクス

この節では素子のダイナミクスについて、いくつかの数値計算結果を紹介する。Fig.8 は、パラメータ l_1=1.0,l_2=2.0,a=1.0 の時、c と α の変化に対する $(|\dot{\Psi}_{01}|+|\dot{\Psi}_{12}|+|\dot{\Psi}_{02}|)/3$ の変化

である。Fig.8 において、この平均値が 0 の黒い領域は $\dot{\psi}_0 = \dot{\psi}_1 = \dot{\psi}_2$ である事を示しており、それ以外の領域は、少なくとも一つの素子が同期から外れている事を示す。ただし、角速度が同値となる事を、ここでは同期と定義する。Fig.9、10 にはそれぞれ、素子が同期している時、素子が同期していない時の一例を示す。

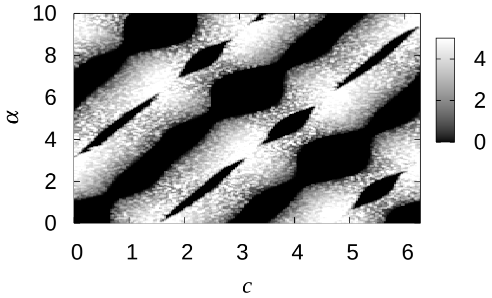

Fig.8: l_1=1.0,l_2=2.0,a=1.0 の時の $(|\dot{\Psi}_{01}| + |\dot{\Psi}_{12}| + |\dot{\Psi}_{02}|)/3$

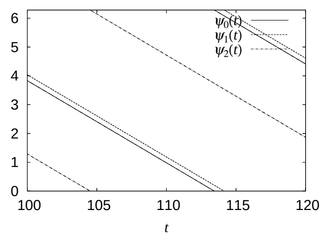

Fig.9: l_1=1.0,l_2=2.0,a=1.0, c=1.72,α=3.65 の時の ψ_0, ψ_1, ψ_2 の時間変化

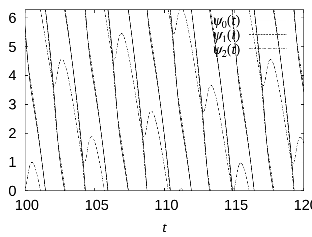

Fig.10: l_1=1.0,l_2=2.0,a=1.0, c=1.72,α=4.82 の時の ψ_0, ψ_1, ψ_2 の時間変化

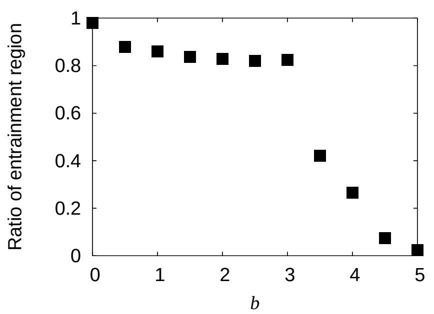

Fig.11: b=b_1=b_2 の時、b の変化に対する同期領域の変化

また、式 (14)〜(16) において b_1、b_2 の値が同期領域に与える影響について調べた。パラメータを b=b_1=b_2 として、b を 0〜5 まで変化させ、c=0〜2π、α=0〜10 の範囲で同期領域が占める割合を調べた。結果を Fig.11 に示す。b が増加するにつれ、同期領域が減少する傾向にある。図から、$b = 3$ のあたりを境に同期領域が急激に減少する事が見て取れる。現状では、この現象について明示的な解釈を与える事はできていない。ただし、b の増加によって、式 (14)〜(16) の ψ_0、ψ_2 間の相互作用が、ψ_0、ψ_1 と ψ_1、ψ_2 間の相互作用に比べ、相対的に小さくなる事はわかる。従って、全素子の同期には、3 素子全ての間の相互作用が同程度に効くかどうかが影響していて、その域値が $b = 3$ 程度であるのかもしれない。

4 まとめ

SO モデルをネットワークに拡張するためパラメータ a を導入し、式 (8)〜(10) を得た。変数変換 (11)〜(13) により、3 体、位置固定の SO モデルにおいて、実空間には存在しない時も 1 次元 SO モデルのダイナミクスで記述できる場合がある事が判明し、そのための条件も見付けた。従って、この条件内では 1 次元 SO モデルのダイナミクスを解析する事で、実空間を含む、より広い空間でのダイナミクスも論ずる事ができる。また、全素子間の相互作用が同程度の大きさであれば、同期が起こり易い事が示唆された。

4 体以上の多体の場合にも 1 次元 SO モデルで記述できるような変数変換が存在するのかを調べる事と、ダイナミクス自体の詳細な解析、さらに、1 次元 SO モデルで記述できない領域の解析、$b = 3$ での同期領域の急激な変化のメカニズムの解明が今後の課題として挙げられる。

参考文献

[1] 増田直紀, 今野紀雄, 「複雑ネットワークの科学」 産業図書株式会社 (2005)

[2] 大久保潤, 藤原義久, 上林憲行, 小野直亮, 湯田聴夫, 相馬亘, 佐藤一憲, 「ネットワーク科学の道具箱」林幸雄編, 株式会社近代科学社 (2007)

[3] D. Tanaka, *Phys. Rev. Lett.* **99** 134103 (2007)

[4] 田中ダン, 駆動振動子群の創発構造 情報処理学会論文誌: 数理モデル化と応用ネットワークが創発する知能 特集号 Vol.2, No.1, 1-9 (Feb. 2009)

[5] D. Tanaka, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **178** 164-174 (2009)