

# 車粒子の非等方性挙動に注目した一次元圧縮性流体モデル

友枝 明保<sup>†</sup>, 社本 大輔<sup>†</sup>, 大塚 一路<sup>†</sup>, 西成 活裕<sup>†,††</sup>

<sup>†</sup> 東京大学大学院 工学系研究科 航空宇宙工学専攻

<sup>††</sup> 独立行政法人 科学技術振興機構 さきがけ

## 概要

一次元交通流を記述する流体モデルは数多く存在するが、中でも Payne モデルは交通流の特徴である一様流不安定性を再現するモデルとして知られている。しかし、Payne モデルは不安定性を示す数値解が発散してしまうという問題点も持ち合わせており、安定な衝撃波形成を再現するようなモデルに改良する必要がある。そこで本稿では、車の非等方性挙動に注目し、拡散項を導入することなく Payne モデルを改良した新しい流体モデルの詳細な理論解析を行ったので報告する。

## One-Dimensional Compressible Fluid Model focused on Anisotropic Behavior of Particles

Akiyasu Tomoeda<sup>†</sup>, Daisuke Shamoto<sup>†</sup>, Kazumichi Ohtsuka<sup>†</sup> and Katsuhiko Nishinari<sup>†,††</sup>

<sup>†</sup> Department of Aeronautics and Astronautics, School of Engineering, University of Tokyo

<sup>††</sup> PRESTO, Japan Science and Technology Corporation

## Abstract

The dynamics of one-dimensional traffic flow has been expressed by many compressible fluid models. Among them, Payne model is well known for instability aspect in homogeneous flow. However, it is necessary to modify Payne model to stabilize the shock wave, since numerical divergence for disturbance is occurred in Payne model. In this paper, we have proposed modified Payne model without diffusion term in consideration of anisotropic behavior of particles and analyzed it in detail.

## 1 Introduction

近年、一次元交通流を記述するモデルとしてセルオートマトンモデル [1, 2, 3] や追従モデル [4] (特に最適速度 (Optimal Velocity, OV) モデル [5]) と呼ばれるモデルが数理的な交通流研究の中心モデルとなっている。これらのモデルはいわばミクロなレベルでのモデル化であり、各車を離散的な粒子として扱っていることが大きな特徴である。その一方で、各車を一次元の連続体として近似することにより、車の挙動を一次元流体の密度変化で記述し、系全体の平均速度や平均密度に焦点をあてたマクロなレベルでのモデル化も 1950 年頃から圧縮性流体力学の応用問題の一つとして盛んに研究されており、現在に至

るまで数多くのモデルが提案されている [6, 7]。圧縮性流体モデルは、ミクロモデルのように各車粒子の挙動を記述することは出来ないが、微積分学をはじめとした流体力学における様々な手法を利用し、理論的に解析できるという利点がある。また、1990 年代には超離散法という数理的な手法 [8] が開発され、流体モデルとセルオートマトンモデルの対応が示された [9]。さらに、2000 年代に入ると Euler-Lagrange 変換 [10] によってセルオートマトンモデルと OV モデルとの関連も明らかにされつつあり、これからの交通流研究の発展のためにも、より良い流体モデルの構築が必要不可欠である。

流体モデルの中でも Payne モデル [6] は交通流の

特徴の一つである一様流不安定性を示すモデルとして知られており、次のように車の台数の保存の式（連続の式）と車粒子の運動方程式による連立微分方程式系で記述される。

### Payne model

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\tau} (V_{\text{opt}}(\rho) - v) - \frac{a^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (2)$$

$$\text{ただし, } a^2 = -\frac{1}{2\tau} \frac{dV_{\text{opt}}(\rho)}{d\rho} > 0 \quad (3)$$

ここで、 $\rho(x, t), v(x, t)$  はそれぞれ場所  $x$ , 時刻  $t$  における粒子の密度と速度を表しており、 $\tau$  はドライバーの反応遅れ時間を表している。また、 $V_{\text{opt}}(\rho)$  は最適速度関数と呼ばれるものである。

Payne モデルは一様流不安定性を持つ非常に強力なモデルであるが、不安定性を示す領域で安定な衝撃波形成を再現出来ず、その数値解が発散してしまうという問題点も持ち合わせている。そのため、数値解の発散を抑えるために拡散項を導入して安定化に成功した Kerner-Konhäuser モデル [7] も提案されているが、拡散項には等方性が存在し、実際の車の挙動を再現するモデルとしては不十分である。

そこで本稿では、車の挙動の非等方性を考慮し、拡散項を導入することなく Payne モデルを改良することで、非線形飽和によって安定な衝撃波形成を再現しうるモデルを構築したので報告する。

## 2 Experimental Data

我々は高速道路の追従走行実験により、ドライバーの反応時間に関して図 1 のようなデータを得た。図 1 は縦軸に速度の共分散値、横軸にドライバーの反応時間をとったものであり、渋滞前、渋滞中、渋滞後と 3 つの状況についてプロットをしている。この図から、ドライバーの反応時間  $\tau$  は明らかに定数ではなく、運転状況によって変化していることがわかる。

そこで現象論的にドライバーの反応時間は加速度に依存しているものと仮定することで、Payne モデルの運動方程式 (2), (3) における  $\tau$  を関数化し、(1) とあわせることで Modified-Payne モデルとする。

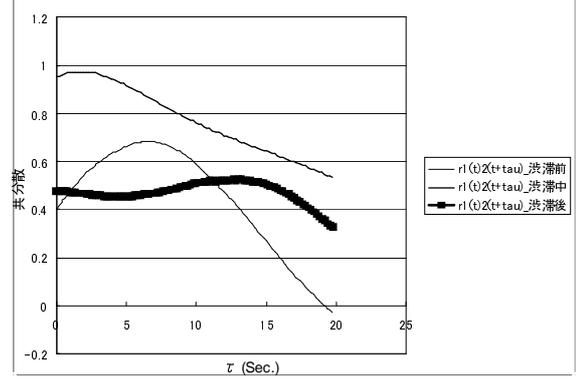


図 1: Covariance value of the car-velocity against the reaction time.

### Modified Payne model

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\tau \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)} \left[ V_{\text{opt}}(\rho) - v \tau' \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - v \right] - \frac{a^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (5)$$

$$\text{ただし, } a^2 = -\frac{1}{2\tau \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)} \frac{dV_{\text{opt}}(\rho)}{d\rho} > 0 \quad (6)$$

ここで、(5) 式の右辺の括弧内に新しい項が加わっているが、これは導出の際に、 $\tau$  を関数化したことによって生じる項であることに注意されたい。

## 3 Linear Stability Analysis

Modified Payne モデルに対する線形安定性解析を行う。一様流解に微小擾乱を加え、

$$\begin{cases} \rho = \rho_0 + \varepsilon \rho_1 \\ v = V_{\text{opt}}(\rho_0) + \varepsilon v_1 \end{cases} \quad (7)$$

とおき、さらに、フーリエ成分を

$$\rho_1, v_1 \sim \exp(i(kx + \omega t)) \quad (8)$$

と定義すると、分散関係式は

$$\omega + kV_{\text{opt}} = \frac{i}{2\tau(0)} \left\{ 1 \pm \sqrt{(1 + 2k^2\tau(0)V'_{\text{opt}}(\rho_0)) - 4ik\rho_0\tau(0)V'_{\text{opt}}(\rho_0)} \right\} \quad (9)$$

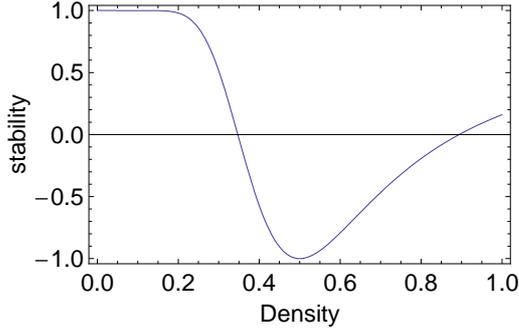


図 2: Stability plot under the optimal velocity function[5] and  $\tau_0 = 2.0$ .

となり，安定性条件は以下のように得られる．

$$\frac{1}{2\tau(0)} + \rho_0^2 \frac{dV_{\text{opt}}(\rho)}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_0} > 0 \quad (10)$$

ここで，反応度関数を

$$\tau\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) = \tau_0 \exp\left[-\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2/2\right] \quad (11)$$

とガウス関数で定義し，最適速度関数に坂東らの OV 関数 [5] を用いると，図 2 のような安定性プロットが得られる．この図から，Modified Payne モデルでは低密度と高密度領域で安定性を，中密度領域で不安定性をそれぞれ示しており，実際の交通流の物理現象と対応していることが確認された．

## 4 Reduced Equations

微小擾乱に対して非線形項と他の線形項との間どのような関係性があるかを調べるために，拡散スケーリングを導入し空間  $X$  と時間  $T$  をそれぞれ以下のようなオーダーで考える．

$$\begin{cases} X \sim \varepsilon & (X = \varepsilon x) \\ T \sim \varepsilon^2 & (T = \varepsilon^2 t) \end{cases} \quad (12)$$

さらに，摂動展開

$$\begin{cases} \rho \sim \rho_0 + \varepsilon\rho_1 + \varepsilon^2\rho_2 + \varepsilon^3\rho_3 + \dots \\ v \sim v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \varepsilon^3 v_3 + \dots \end{cases} \quad (13)$$

を Modified Payne モデルに代入し， $\varepsilon$  の各べきについて整理すると，(4) より

$$\varepsilon^2: \frac{\partial}{\partial X} (\rho_1 v_0 + \rho_0 v_1) = 0 \quad (14)$$

$$\varepsilon^3: \frac{\partial \rho_1}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X} (\rho_2 v_0 + \rho_2 v_1 + \rho_0 v_2) = 0 \quad (15)$$

$$\varepsilon^4: \frac{\partial \rho_2}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X} (\rho_3 v_0 + \rho_2 v_1 + \rho_1 v_2 + \rho_0 v_3) = 0 \quad (16)$$

となり，(5) より

$$\varepsilon^0: V_{\text{opt}} = v_0 \quad (17)$$

$$\varepsilon^1: V'_{\text{opt}} = \frac{v_1}{\rho_1} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2: v_0 \frac{\partial v_1}{\partial X} &= \frac{1}{2\tau(0)} (V''_{\text{opt}} \rho_1^2 + 2V'_{\text{opt}} \rho_2 - 2v_2) + \frac{1}{2\tau(0)\rho_0} V'_{\text{opt}} \frac{\partial \rho_1}{\partial X} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^3: \frac{\partial v_1}{\partial T} + v_0 \frac{\partial v_2}{\partial X} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial X} &= \frac{1}{\tau(0)} \left( \frac{1}{6} V'''_{\text{opt}} \rho_1^3 + V''_{\text{opt}} \rho_1 \rho_2 + V'_{\text{opt}} \rho_3 - v_3 \right) \\ &+ \frac{1}{2\tau(0)} \left( V'_{\text{opt}} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_2}{\partial X} + V''_{\text{opt}} \frac{\rho_1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_1}{\partial X} - V'_{\text{opt}} \frac{\rho_1}{\rho_0^2} \frac{\partial \rho_1}{\partial X} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

となる．ただし，

$$V_{\text{opt}}(\rho_0) = V_{\text{opt}} \quad (21)$$

$$\frac{dV_{\text{opt}}(\rho)}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_0} = V'_{\text{opt}} \quad (22)$$

$$\frac{d^2 V_{\text{opt}}(\rho)}{d\rho^2} \Big|_{\rho=\rho_0} = V''_{\text{opt}} \quad (23)$$

$$\frac{d^3 V_{\text{opt}}(\rho)}{d\rho^3} \Big|_{\rho=\rho_0} = V'''_{\text{opt}} \quad (24)$$

と略記した．

一次の摂動量として  $\rho_1 = \phi_1$  と置き，式 (14) と式 (18) より，

$$v_1 = -\frac{v_0}{\rho_0} \phi_1 \quad (25)$$

$$V'_{\text{opt}} = -\frac{v_0}{\rho_0} \quad (26)$$

であることに注意すると，式 (15) と式 (19) より，二次の摂動量 ( $\rho_2, v_2$ ) を消去して，一次の摂動量が支配する方程式として，以下のような定数係数の Burgers 方程式が得られる．

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial T} = \left( \frac{2v_0}{\rho_0} - V''_{\text{opt}} \rho_0 \right) \phi_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial X} + \left( \frac{v_0}{2\rho_0} - \tau(0)v_0^2 \right) \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial X^2} \quad (27)$$

さらに、次のオーダーである式 (16) と式 (20) から三次の摂動量 ( $\rho_3, v_3$ ) を消去し、一次の摂動量  $\phi_1$  と二次の摂動量  $\phi_2$  に対して、高次の項まで取り入れた摂動量  $\Phi$  を  $\Phi = \phi_1 + \varepsilon\phi_2$  とおくと、 $\varepsilon$  のオーダーまでで  $\Phi$  に関して以下のような Higher Burgers 方程式が導かれる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial T} = & \left( \frac{2v_0}{\rho_0} - V_{\text{opt}}''\rho_0 \right) \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial X} + \left( \frac{v_0}{2\rho_0} - \tau(0)v_0^2 \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} \\ & + \varepsilon \left\{ - \left( \frac{3}{2}V_{\text{opt}}'' + \frac{1}{2}V_{\text{opt}}'''\rho_0 \right) \phi^2 \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right. \\ & - \left( \frac{2v_0^2\tau(0)}{\rho_0} + 2\tau(0)\rho_0v_0V_{\text{opt}}'' - \frac{1}{2}V_{\text{opt}}'' \right) \frac{\partial}{\partial X} \left( \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right) \\ & \left. - \left( \frac{\tau(0)v_0^2}{\rho_0} - 2v_0^3\tau(0)^2 \right) \frac{\partial^3}{\partial X^3} \Phi \right\} + o(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (28)$$

自然渋滞の解析は安定から不安定に変わる近傍での解析であるため、(28) に中立安定条件

$$\frac{1}{2\rho_0} - \tau(0)v_0 = 0 \quad (29)$$

を課し、 $\varepsilon^2$  以上の項を無視すると、拡散係数が消えた方程式が擾乱の従う本質的な方程式となることがわかった<sup>1</sup>。

## 5 Conclusions

本稿では、実測データから得られた知見によりドライバの反応時間を関数化し、従来の Payne モデルを改良した Modified Payne モデルを提案し理論解析を行った。安定性解析から、Modified Payne モデルは実際の交通流の物理現象と対応する安定性を示すことが確認され、逡減摂動法を用いた詳細な解析では微小擾乱が従う方程式が散逸系の方程式で記述されることも示した。

一方、自然渋滞の解析が中立安定条件近傍での解析であるため、分散関係式を

$$\omega \sim c_0 + c_1k + c_2k^2 + c_3k^3 + \dots \quad (30)$$

と波数展開したときに、 $c_1 \sim 0$  の近傍での解析となり、 $\omega \sim k^3$  となる分散スケールリングが本質となる。そのため、拡散スケールリングの用いて導いた支配方程式に対して、中立安定条件を導入した支配方程式と、分散スケールリングを用いて導いた支配方程式の伝播擾乱の性質を詳細に解析する必要がある。しか

<sup>1</sup>特に、最適速度関数が変曲点を持つ場合には、(28) の右辺第一項が消え、mKdV 方程式に帰着する。OV モデルの場合も mKdV になることが知られている [11]。

し、分散関係式 (9) において  $k = 0$  の周りで長波展開を行うと

$$\begin{aligned} \omega + kV_{\text{opt}} = & \frac{i}{2\tau(0)} \times \\ & \left[ 1 \pm \left\{ 1 + 4\tau(0)^2 a_0^2 \rho_0 ik + (1 - 4\tau(0)^2 a_0^2 \rho_0^2) F(k) \right\} \right] \end{aligned} \quad (31)$$

(ただし  $F(k) = c_2k^2 + c_3k^3 + \dots + c_nk^n + \dots$  であり、 $c_n (n = 2, 3, \dots)$  は展開による係数を表す。)

となる。これは中立安定条件 (29) に対して、 $k$  の高次項の係数も同時に 0 となってしまう、このままでは中立安定条件近傍での解析が逡減摂動法を用いて行うことができない。そのため、まず第一にこの問題を解決し、分散スケールリングのもとでの理論解析を行い、本稿で導出した散逸系方程式との詳細な比較解析を行うことが今後の課題である。

## 参考文献

- [1] K. Nagel and M. Schreckenberg, *J. Physique I* **2** (1992), 2221.
- [2] M. Kanai, K. Nishinari and T. Tokihiro, *Phys. Rev. E* **72** (2005), 035102.
- [3] K. Nishinari and D. Takahashi, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **33** (2000), 7709.
- [4] G. F. Newell, *Oper. Res.*, **9** (1961), 209
- [5] M. Bando *et al.*, *Phys. Rev. E* **51** (1995), 1035.
- [6] H. J. Payne, in *Mathematical Models of Public Systems*, edited by G. A. Bekey (1971), 51.
- [7] B. S. Kerner and P. Konhuser, *Phys. Rev. E*, **48** (1993), R2335.
- [8] T. Tokihiro *et al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **76** (1996), 3247.
- [9] K. Nishinari and D. Takahashi, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **31** (1998), 5439.
- [10] J. Matsukidaira and K. Nishinari, *Phys. Rev. Lett.*, **90** (2003), 088701.
- [11] T. S. Komatsu and S. Sasa, *Phys. Rev. E* **52** (1995), 5574.