ベキ的長距離相互作用系と Fractional微分を含む拡張された解析力学の関係

石渡龍輔 [1], 杉山雄規 [2]

[1] 東京医科歯科大学 医歯学総合研究科 情報生物学専攻
[2] 名古屋大学 情報科学研究科 複雑系科学専攻

概要

Fractional 微分を含む解析力学とベキ的な長距離相互作用系の関係を述べる。ベキ的長距離相互作用を持つ系の長波長極限の運動方程式を導出する Fractional ラグランジアンを与えた。

Relationships between models of long range power law interaction and mechanics containing fractional derivative

Ryosuke Ishiwata[1], Yuki Sugiyama [2]

[1] Department of Information Biology, Graduate School of Medicine and Dentistry, Tokyo Medical and Dental University
[2] Department of Complex Systems Science, Graduate School of Information Science, Nagoya University,

Abstract

Relationships between models of long range power law interaction and mechanics containing fractional derivative are investigated. The fractional Lagrangian that satisfies the Euler-Lagrange equation of a continuum system containing long range power law interaction are obtained.

1 はじめに

この論文で取り上げる相互作用は、近接相互作用ではなく、隣接していないもの同士が直接的に力を及ぼし合う長距離相互作用である。長距離相互作用系における興味深い点は、Dyson によって報告された長距離相互作用を持った 1 次元 Ising 模型は、有限温度で相転移を起こすことである [1]。最近接相互作用のみを含む 1 次元の Ising 模型は、有限温度における相転移が存在しないことが知られている。そのため、この報告により長距離相互作用系は、より複雑な現象を表現できる可能性を含んでいると考えられる。
2005 年 Laskin らは、既に知られている粒子間距離 $(n-m)$ の整数ベキ $((n-m)^{-s}, (s = 1, 2, 3, \cdots))$ を含む長距離相互作用系を拡張し、非整数階 $(2 < s < 3)$ のベキ乗を含む長距離相互作用系を研究した [2]。この長距離相互作用系を元に、2007 年 Tarasov らは非整数階ベキ乗長距離相互作用系の長波長極限での作用積分を発見した [3]。
また、これらの研究とは別に、Fractional 微分を含むラグランジアンや運動方程式へと拡張された解析力学の研究が、なされている [4, 5]。これらの研究は、整数 n 階の微分を含むように拡張された解析力学を元に n を非整数階 α にすることで任意な α 階の Fractional 微分を含む拡張されたラグランジアンを導入している。このラグランジアンに対し変分法を適用することで Fractional 微分を含む Euler-Lagrange

方程式が導出できるということが、既に知られている。この拡張は、粒子に対して与えられたものであったが、その後、場に対しても Fractional 微分を含んだ解析力学の拡張がなされた [6]。

しかし、Fractional 微分を含む拡張された解析力学において、非整数階のベキ乗長距離相互作用系についての研究がなされておらず、そのような相互作用を含む系のラグランジアンも未知であった。そこで我々は、拡張された解析力学を用い長距離相互作用の長波長極限の運動方程式とラグランジアンの導出を行った。

2 Fractional 微分

Fractional 微分の起源は、Rhopital や Leibnitz であると言われている。しかし、Fractional 微分が、大きく発展したのは 1900 年代になってからである。Fractional 微分は、様々な定義と性質を持っているが、特によく知られているのは、Riemann-Liouville による定義であり、α 階微分の定義は以下のように与えられる。(ここで n は、$n-1$ が α を超えない最小の整数として一意に決定される。)

$$({}_{-\infty}\mathrm{D}_x^\alpha u)(x) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left({}_{-\infty}\mathrm{I}_x^{n-\alpha} u(x)\right) \tag{1}$$

$$({}_{-\infty}\mathrm{I}_x^{n-\alpha} u)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{-\infty}^{x}\frac{u(\chi)}{(x-\chi)^{-n+\alpha+1}}\mathrm{d}\chi \tag{2}$$

$$({}_x\mathrm{D}_\infty^\alpha u)(x) = (-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left({}_x\mathrm{I}_\infty^{n-\alpha} u(x)\right) \tag{3}$$

$$({}_x\mathrm{I}_\infty^{n-\alpha} u)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{x}^{\infty}\frac{u(\chi)}{(\chi-x)^{-n+\alpha+1}}\mathrm{d}\chi \tag{4}$$

上の各式は、それぞれ Left Fractional Derivative (1), Right Fractional Derivative (3) と呼ばれる。また、物理分野においてよく用いられる定義は、Caputo の Fractional 微分であり、以下のように定義される。(α, n, ${}_{-\infty}\mathrm{I}_x^{n-\alpha}$, ${}_x\mathrm{I}_\infty^{n-\alpha}$ は上と同様である。)

$$({}_{-\infty}^{\;\;C}\mathrm{D}_x^\alpha u)(x) = {}_{-\infty}\mathrm{I}_x^{n-\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}u(x)\right) \tag{5}$$

$$({}_x^C\mathrm{D}_\infty^\alpha u)(x) = {}_x\mathrm{I}_\infty^{n-\alpha}\left((-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}u(x)\right) \tag{6}$$

作用する関数によっては、Riemann-Liouville と Caputo は、同じ結果を与えないが、α が整数であれば、いずれの定義も通常の微分と同じ結果を与えることが知られている。

$${}_{-\infty}\mathrm{D}_x^n = (-1)^n\,{}_x\mathrm{D}_\infty^n = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \tag{7}$$

3 離散系の長距離相互作用

Laskin らが取り扱った模型は、連続時間 1 次元格子場の模型である。そのラグランジアンは、次の式 (8) で与えられる。

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dot{u}_n^2 + \frac{g}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{(u_n-u_m)^2}{|n-m|^s} + \sum_{n=-\infty}^{\infty}U(u_n) \tag{8}$$

このラグランジアンを変分することで、長距離相互作用を持つ運動方程式 (9) を導出することができる。

$$\ddot{u}_n - g\sum_{m,m\neq n}\frac{u_n-u_m}{|n-m|^s} - \frac{\partial U(u_n)}{\partial u_n} = 0 \tag{9}$$

この運動方程式をフーリエ変換し、連続近似と s が $2<s<3$ の場合を考慮した長波長展開を行うことで、運動方程式 (10) を得る。

$$\ddot{u}(t,r) + G_{s-1}\mathcal{D}^{s-1}u(t,r) - \frac{\partial U(u(t,r))}{\partial u(t,r)} = 0 \tag{10}$$

$$G_{s-1} = g\frac{\pi}{\Gamma(s)\sin(\frac{\pi}{2}(s-1))} \tag{11}$$

$$\mathcal{D}^{s-1} = \frac{-1}{2\cos(\frac{\pi(s-1)}{2})}\left({}_{-\infty}\mathrm{D}_x^{s-1} + {}_x\mathrm{D}_\infty^{s-1}\right) \tag{12}$$

以上の式 (10) が、長距離相互作用の長波長極限の運動方程式であり、長距離相互作用のエフェクティブな振る舞いを表していると考えられる。自由運動の場合の分散関係式を求めたものが式 (14) である。

$$\left(-w^2 + G_{s-1}|k|^{s-1}\right)e^{i(wt+kx)} = 0 \tag{13}$$

$$w = \pm\sqrt{G_{s-1}|k|^{s-1}} \tag{14}$$

振動数 w と波数 k の分散関係が、$s(2<s<3)$ の変化に伴い連続的に変化することが分かる。係数 G_{s-1} を除外して分散関係式を見れば、$s=3$ で波動方程式の自由運動における分散関係式となっていることが分かる。

4 長距離相互作用を持つ作用積分

2 つの異なる時空間 $x=(t,r)$, $y=(t',r')$ に定義された $u(x)$, $u(y)$, $\partial_t u(x)$, $\partial_{t'}u(y)$, $\partial_r u(x)$, $\partial_{r'}u(y)$

の汎関数を変分することで、(空間に関する) 長距離相互作用と時間に関する長距離相互作用を含む運動方程式を以下のように導くことができる [3]。
まず、式 (15) のように、作用積分を定義する。ここで、$V(u(x),u(y))$ はポテンシャルである。

$$S[u]=\int_{\infty}^{\infty}\int_{\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\mathrm{d}y(\frac{1}{2}\partial_t u(x)g_0(x,y)\partial_{t'}u(y) + \frac{1}{2}\partial_r u(x)g_1(x,y)\partial_{r'}u(y)+V(u(x),u(y))) \quad (15)$$

上の作用積分の g_0, g_1 を次のようにとる。

$$g_0(x,y)=\frac{-1}{2\cos(\frac{\pi\alpha}{2})\Gamma(2-\alpha)}\frac{\delta(t-t')}{(r-r')^{s-2}} \quad (16)$$

$$g_1(x,y)=\frac{1}{2}\delta(r-r')\delta(t-t') \quad (17)$$

以上のように設定した場の作用積分を変分することで、運動方程式 18 が求まる。

$$\ddot{u}(t,r)+\mathcal{D}^{s-1}u(t,r)-\frac{\partial U(u(t,r))}{\partial u(t,r)}=0 \quad (18)$$

$$U(u(t,r))=\int_{-\infty}^{\infty}\{V(u(t,r),u(t',r')) + V(u(t',r'),u(t,r))\}\delta(t-t')\delta(r-r') \quad (19)$$

この方程式は、上述の長距離相互作用の長波長項を持つ運動方程式と同様の形をしている。

5 長距離相互作用を導く Fractional ラグランジアン

一般に Fractional 微分を含む場のラグランジアンは、以下の式 (20) で与えられる [6]。

$$\mathcal{L}\equiv L({}_{-\infty}\mathrm{D}_t^{\alpha_0}u(t,r),{}_t\mathrm{D}_{\infty}^{\alpha_1}u(t,r), {}_{-\infty}\mathrm{D}_r^{\beta_0}u(t,r),{}_r\mathrm{D}_{\infty}^{\beta_1}u(t,r),u(t,r),t,r) \quad (20)$$

この Fractional ラグランジアンに変分法を適用することを考える。作用積分は、以下のように与えられる。

$$S[u]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}rL({}_{-\infty}\mathrm{D}_t^{\alpha_0}u(t,r), {}_t\mathrm{D}_{\infty}^{\alpha_1}u(t,r),{}_{-\infty}\mathrm{D}_t^{\beta_0}u(t,r),{}_t\mathrm{D}_{\infty}^{\beta_1}u(t,r),u(t,r),t,r) \quad (21)$$

変分された汎関数は、式 (22)。$\delta u(t,r)$ は、$u(t,r)$ の変分を表している。

$$\delta S[u]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r\big[\frac{\partial L}{\partial u}\delta u + \frac{\partial L}{\partial({}_{-\infty}\mathrm{D}_t^{\alpha_0}u)}({}_{-\infty}\mathrm{D}_t^{\alpha_0}\delta u)+\frac{\partial L}{\partial({}_t\mathrm{D}_{\infty}^{\alpha_1}u)}({}_t\mathrm{D}_{\infty}^{\alpha_1}\delta u) + \frac{\partial L}{\partial({}_{-\infty}\mathrm{D}_r^{\beta_0}u)}({}_{-\infty}\mathrm{D}_r^{\beta_0}\delta u)+\frac{\partial L}{\partial({}_r\mathrm{D}_{\infty}^{\beta_1}u)}({}_r\mathrm{D}_{\infty}^{\beta_1}\delta u)\big] \quad (22)$$

Fractional 微分については、Riemann-Liouville と Caputo の結果が一致する関数について、次の公式 (23) が成り立つ。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,({}_{-\infty}\mathrm{D}_x^{\alpha}f(x))g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,f(x)({}_x\mathrm{D}_{\infty}^{\alpha}g(x)) \quad (23)$$

$${}_{-\infty}\mathrm{D}_x^{\alpha}f(x)={}_{-\infty}^{\ C}\mathrm{D}_x^{\alpha}f(x) \quad (24)$$

$${}_x\mathrm{D}_{\infty}^{\alpha}g(x)={}_x^C\mathrm{D}_{\infty}^{\alpha}g(x) \quad (25)$$

式 (21) に公式 (23) を用いることで Fractional ラグランジアンから Euler-Lagrange 方程式 (26) が導出される。これは、Fractional Euler-Lagrange 方程式とも呼ばれる。

$$\frac{\partial L}{\partial u}+{}_t\mathrm{D}_{\infty}^{\alpha_0}\frac{\partial L}{\partial({}_{-\infty}\mathrm{D}_t^{\alpha_0}u)}+{}_{-\infty}\mathrm{D}_t^{\alpha_1}\frac{\partial L}{\partial({}_t\mathrm{D}_{\infty}^{\alpha_1}u)} + {}_r\mathrm{D}_{\infty}^{\beta_0}\frac{\partial L}{\partial({}_{-\infty}\mathrm{D}_r^{\beta_0}u)}+{}_{-\infty}\mathrm{D}_r^{\beta_1}\frac{\partial L}{\partial({}_r\mathrm{D}_{\infty}^{\beta_1}u)}=0 \quad (26)$$

さて、以上の過程をベキ的長距離相互作用を持つ系の長波長極限の運動方程式を導出することに用いる。そのようなラグランジアンは、次のように与えられる。

$$L_{long\,range}=\frac{1}{2}(\dot{u})^2+\frac{1}{4}\{({}_{-\infty}\mathrm{D}_r^{\frac{s-1}{2}}u)^2 + ({}_x\mathrm{D}_{\infty}^{\frac{s-1}{2}}u)^2\}+U(u) \quad (27)$$

これを変分すれば、上の式 (26) により、運動方程式 (28) が導かれる。

$$\ddot{u}-\frac{1}{2}\{{}_r\mathrm{D}_{\infty}^{\frac{s-1}{2}}{}_{-\infty}\mathrm{D}_r^{\frac{s-1}{2}}u+{}_r\mathrm{D}_{\infty}^{\frac{s-1}{2}}{}_{-\infty}\mathrm{D}_r^{\frac{s-1}{2}}u\} - \frac{\partial U(u)}{\partial u}=0 \quad (28)$$

ここで、Samko 達の文献にある公式

$$({}_r\mathrm{D}_{\infty}^{\frac{s-1}{2}}{}_{-\infty}\mathrm{D}_r^{\frac{s-1}{2}}+{}_r\mathrm{D}_{\infty}^{\frac{s-1}{2}}{}_{-\infty}\mathrm{D}_r^{\frac{s-1}{2}})u=-2\,\mathcal{D}^{s-1} \quad (29)$$

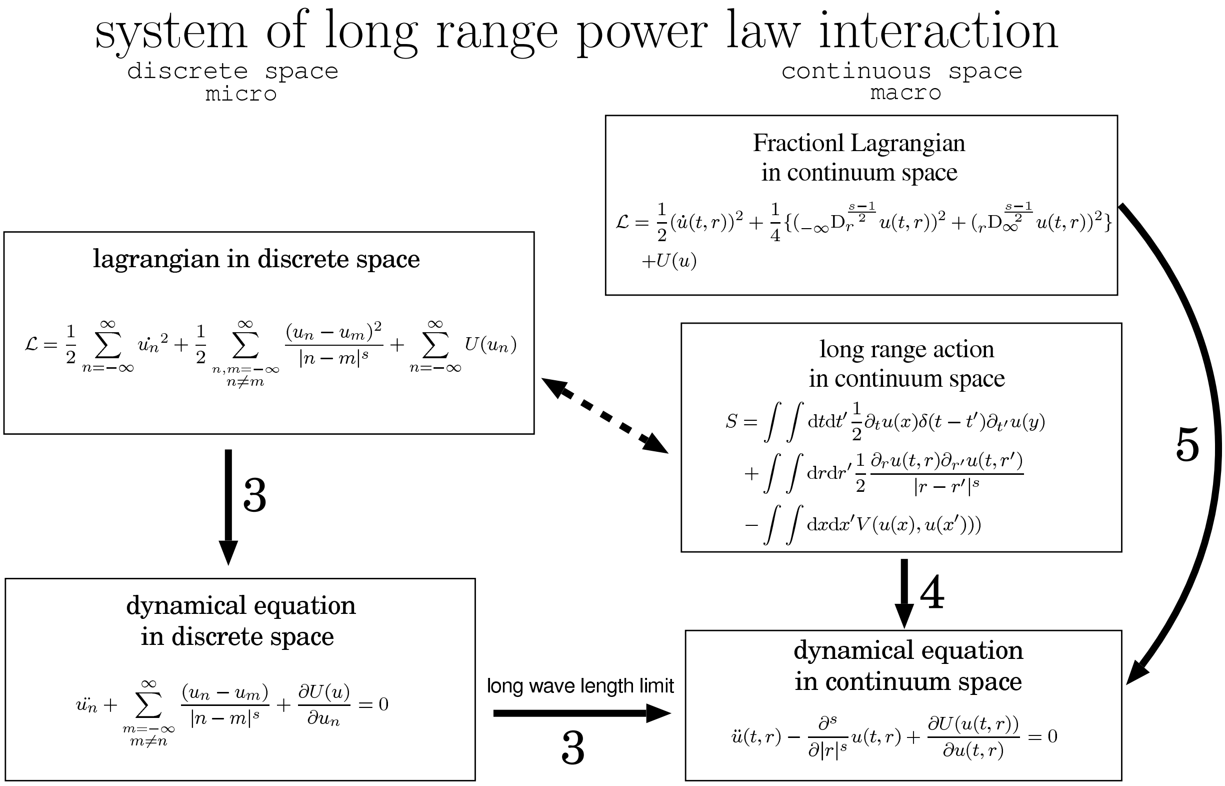

図 1: 解明されたベキ的長距離相互作用と Fractional に拡張された解析力学の関係図

を用いることにより、上で求められた Fractional Euler-Lagrange 方程式 (28) は、最終的に式 30 に書き換えられる。

$$\ddot{u} + \mathcal{D}^{s-1}u - \frac{\partial U(u)}{\partial u} = 0 \qquad (30)$$

このように求めれられた Fractional Euler-Lagrange 方程式 (30) は、離散模型の長波長極限の運動方程式 (10) 及び (18) と係数を除いて一致していることが分かる。これにより、設定した Fractional ラグランジアンは、ベキ的長距離相互作用を持つ運動方程式を与えることが示された。

6 まとめ

以上の議論により、ベキ的長距離相互作用と、Fractional 微分を含むように拡張された解析力学との関係が示された。この全体像を、まとめたものが図 1 である。Fractional 微分を含むように拡張された解析力学は、未だ発展途上にあり通常の解析力学における様々な数学的研究や物理的な意味付けが十分ではない。例えば、通常の解析力学におけるネーターの定理は、拡張された解析力学を用いて数学の形式的には議論されている [7]。しかし、このような議論で導出された拡張されたネーターの保存量は、物理的な意味付けをなされていない。このような段階にある理論を整理することが、今後の課題である。また、Riewe によって研究が始まったと考えられる Fractional 微分を含むように拡張された解析力学のひとつの目的は、線形摩擦を持つ運動方程式を拡張されたラグランジアンからの変分で導出することであったが、これは未だに発見されていない。これを発見することも、今後の課題の一つである。また、ベキ的な長距離相互作用を持つ系のマクロな振る舞いは、長波長極限で Fractional 微分を含む運動方程式によって記述されることが自然であると考えられる。これを生物、生態系等に応用することも今後の課題として挙げられる。

参考文献

[1] Freeman J Dyson. An ising ferromagnet with discontinuous long-range order. *Communications in Mathematical Physics*, Vol. 21, p. 269, Dec 1971.

[2] N Laskin and G Zaslavsky. Nonlinear fractional dynamics on a lattice with long range interactions. *arXiv*, Vol. nlin.SI, , Dec 2005. 28 pages, submitted to Physica A.

[3] V.E. Tarasov and G.M. Zaslavsky. Fractional dynamics of systems with long-range space interaction and temporal memory. *Physica A*, Vol. 383, No. 2, p. 291, 2007.

[4] Fred Riewe. Mechanics with fractional derivatives. *Physical Review E*, Vol. 55, p. 3581, Mar 1997.

[5] O AGRAWAL. Formulation of euler-lagrange equations for fractional variational problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Jan 2002.

[6] D Baleanu and S Muslih. Lagrangian formulation of classical fields within riemann-liouville fractional derivatives. *arXiv*, Vol. hep-th, , Oct 2005.

[7] G Frederico and D Torres. A formulation of noether's theorem for fractional problems of the calculus of variations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Jan 2007.