対面粒子流における流動-ジャミング相転移

飯塚 剛、鈴木 迪子

愛媛大学大学院理工学研究科

概要

周期境界条件を課した通路を対面的に進む粒子流を考えた。流れのライフタイムの統計解析から、流動相-ジャミング相の相転移を見い出だすことができた。

Flow-jamming transition in counter flow of particles

Takeshi Iizuka, Michiko Suzuki

Graduate School of Science and Engineering, Ehime Universtiy

Abstract

We have considered counter flow of particles in a aisle under periodic boundary condition. Flow-jamming transition has been extracted from the statistical analysis of the flow life time.

---

1 はじめに

現代物理学におけるダイナミックスの対象は、粉流体や交通流から生物個体の集団までその大きな広がりを見せている [1, 2]。これらの力学は弾性体や流体と違って、運動方程式に相当する確固たる基本原理がないことに大きな特徴があり、それが故に非線形物理学の大きなフロンティアを成していると言えるであろう。一方でこれらダイナミックスの諸現象には共通性、普遍性が見受けられることが多い。

一つの例として流れの相転移がある。粉流体は流体的に振舞う流動相がある一方で座屈で代表されるような固体的な振る舞いも示すことが知られている。交通流においては、車両が持続的に走行する状態から渋滞へ移ることが転移として考えられている。これらの現象は剛体球におけるアルダー転移に比較されるべきものだと考えられる

歩行者流は通常の交通流とは違い、同じ場所をあらゆる方向に進む流れが生じており、さまざまな現象が起こると期待できる。典型的な例は通路を対面的に進む歩行者がいる場合だ。対面歩行者流はこれまで通路が開放端の場合の自由相-停止相の転移 [3] が見出された。周期的通路においては、粒子の大きさによる効果 [4]、歩行者の速度の違いの効果 [5]、また最大速度の違いの効果 [6] などを取り入れたジャミング転移の研究がある。

ジャミング相にある場合対面歩行者流はやがて止まる、つまり流れのライフタイムが有限である。これまで流れのライフタイムに関する研究は避難流 [8, 7] を除けばあまりなされていなかったようである。本論文ではこの点に注目して、通路を対面的に流れる２種の粒子系の流れのライフタイムの統計的な解析を行う。ジャミング相－流動相の相転移をライフタイムの発散として考えて、相図を描くのが最大の目的である。

2 モデルとジャミング発生率

本研究では２種類の多粒子が混在する系における擬１次元の流れに着目する。ここで言う２種類とは、緩和速度が対面的に向き合うものであり、これらは互いに排斥するものを指す（図 1）。このような対面 2 体流が実現される物理系は、粘性液体のおける緩和速度の異なる２種類の多粒子系や、ブラジリアンナッツに代表されるような混合粉流体系、道路における高速車と低速車の混在する交通流、さらには歩道における左右に進む人の流れなどが考えられる。

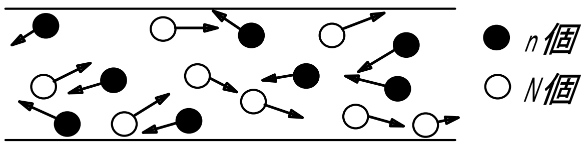

図 1: 対面粒子流

力学のモデルとしてセルオートマトン導入する。横幅 100、縦幅 10 の格子を考えて横方向に周期的境界条件を課すものとする。計 1000 のサイトに右横に進行する粒子 N 個 (白) と左横に進行する粒子 n 個 (黒) をランダムに初期配置する。その後の動きは 1 step ごとに、以下のルールに従う

(1) 正面のサイトが空いていたらそこに進む

(2) 正面が塞がって前方左右両方が空いていたら確率 1/2 でどちらかに進む)。

(3) 正面が塞がって前方左右いずれかのサイトが塞がっていたら空いている方に進む。

(4) 上記いずれでもない場合は進めない。(横や後方には進まないとする)

(5) 同サイトに複数の粒子がきた場合はランダムに一つを選び出し他は元に戻す (進めない)。

以上のルールで数値シミュレーションを行うと、粒子数 N, n に応じて流れが継続する流動状態と流れがやがて止まるジャミング状態 とが見受けられる。一

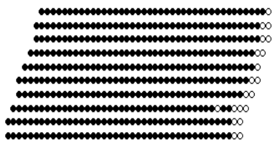

図 2: ジャミング状態

定時間 (5000 ステップ) においてジャミング状態に陥る確率をアンサンブル平均によりに計算したのが次図である。ただし左向き粒子数を $n = 20$ と固定した上で、右向き粒子数を変化させている。$N = 300$ 付近で 100 %流動的な振る舞いから 100 %ジャミング的な振る舞いに転移することがわかる。これを「相転移的」とする見方はできるであろうが、「相転移」と断定するにはいくつか問題点がある。第一に上記の渋滞発生率のグラフの $N = 300$ 付近における変化は、急峻ではあるがあくまでも不連続性は見られない。また、5000step という有限の時間しか測定していないのでその後にジャミング状態になる可能性

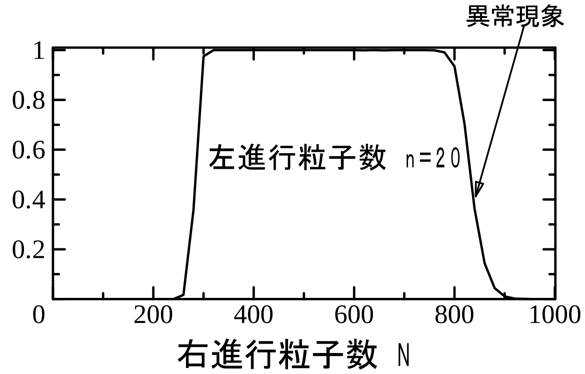

図 3: ジャミング発生率

のあるイベントを見逃しているであろう。だからといって、ジャミング状態になるまでの時間 (流れのライフタイム) を測定しようとすると $N = 300$(転移点) 付近では膨大な時間を要するので、転移点を決めるのは困難である。

また、$N = 800$ 付近で再び流動的な振る舞いが戻っているがこれについては後で議論する。

3 流れのライフタイム統計と特徴的ライフタイム

今後、初期状態からジャミング状態に至るまでの時間を流れのライフタイムと称することにする。そもそもジャミング状態は、同種粒子のクラスターの巨大化によって起こるのだが、その巨大化がどのタイミングで起こるかには確率的要素が入っている。つまり、イベントによってライフタイムが異なるのである。さらに、本研究では周期境界条件を課しているので、一見流動的と見られた流れも十分時間かかった後、突如クラスターが巨大化しにジャミングに陥る場合もある。

クラスターの巨大化を見るために、クラスター指数を導入する。これは、右進行粒子（左進行粒子でもよいが）のすべてのペアーに関して同じ列にいたら（横に並んでいたら)+2 を加えて、同じ行の隣同士にいたら、つまり前後につながっていたら+1 を加えたものとする。典型的な例を図 4 に示す。ただし $N = 330, n = 10$ として、左向き粒子 (10 個) についてのクラスター指数を計算した。長時間にわたって、クラスターがなかなか発達しなかったが、突如巨大化してジャミングに陥った様子がここならよくわかる。しかし、巨大化がいつ起こるかはイベント

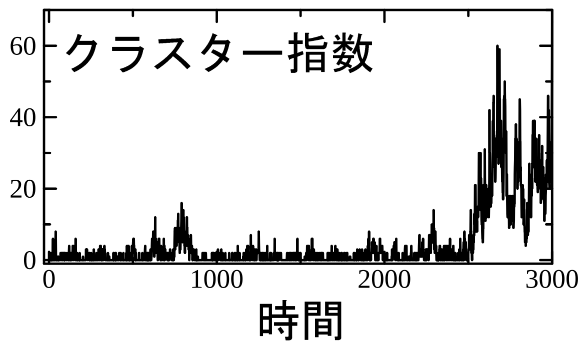

図 4: クラスター指数のダイナミックス

ごとに異なるのである。

このようなとき場合、統計的な解析が適切であると思われる。ここではライフタイム T の頻度分布をとることにする。同様な解析方法はホールからの人の脱出モデルでもなされている [8]。例えば $N = n = 118$ のときの結果を図 5 に示した。但し横軸はライフタイム T、縦軸はその頻度 $P(T)$ を対数スケーリングで表している。明らかにこれは指数関数的減衰

$$P(T) \sim \exp(-\frac{T}{T_0}),$$

を示し最小二乗法フィッティングしたのが図の直線である。ここで定数 $T_0 (\simeq 21369)$ はライフタイムを特徴付ける量であり、平均ライフタイム $< T >$ とみてよい。

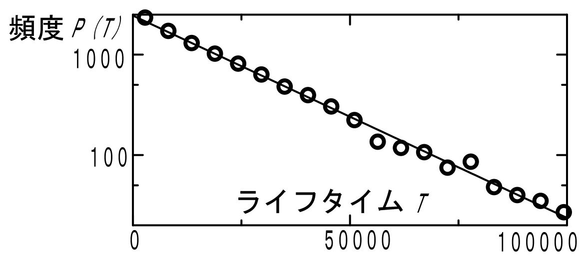

図 5: 流れのライフタイムの頻度分布

特徴的なライフタイム T_0 はジャミング相では有限であるが、流動相では無限となる。ジャミング相にあっても両相の境界付近では T_0 は膨大な数にのぼり現実的に T_0 を算出するのは容易ではない。そこでどこで T_0 が発散するのかを推定するために、以下のようなベキ法則を予測した。

$$< T >= T_0 = \left(\frac{n - n^*}{a}\right)^{-\gamma}$$

ただし右進行粒子数 N を一定あるいは $N = n$ として、左進行粒子数 n を変化させたときのふるまいであり、ある臨界値 n^* で T_0 は発散することを意味している。いま $N = n$ として、実際に T_0 を図った結果を図示すると図 6 のようになる。$n - n^*$ と T_0 は見事にに逆べき関係にあることが、両対数グラフからわかる。ただしここでは、まず試行的に n^* を仮定して a と γ を最小二乗法から求め、これから n^* を改めて最小二乗法から求める。さらにこれから新しい a と γ を求める。この作業を繰り返して n^*, a, γ が一定に収束した時点で最適値とした。図 6 のでは $n^* \simeq 89.6, a \simeq 95.2, \gamma = 8.24$ である。つまり、$N = n$ の場合は n が 89 以下になると特徴的ライフタイム T_0 が発散を示して、流動相になると推定できる。逆に n が 90 以上だとすると T_0 は有限なので、ライフタイムが膨大になったとしてもいずれジャミング状態に陥ることがわかる。このような場合「ジャミング相にある」とすることにする。

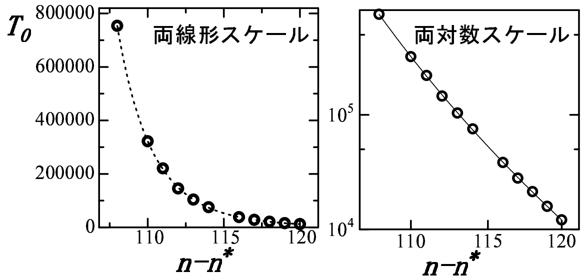

図 6: $n - n^*$ と T_0 の関係

4 ジャミング相と流動相

本研究では 2 つのパラメター、つまり右向粒子数 N と左向き粒子数 n がある。このパラメター空間、つまり $N - n$ 平面において、流動相とジャミング相の相図を描くのが主な目的である。そのためにライフタイムが発散する n の値、つまり臨界値 n^* を N の関数 $n^*(N)$ として考えればこれは相分離線を与える。対称性により $N \geq n$ の場合のみ考えれば十分なので、その領域で得られた相図を図 7 に示す。$N + n \geq 1000$ の領域は総粒子数の超過領域である。N が約 250〜約 800 の領域では n^* は 9 と 10 の間にあり、これは n が 10 以上でジャミング相にあることを示している。これは通路の幅が粒子 10 個分なので、10 個の左進行粒子が横に並んでジャミングが起こることに相当している。総粒子数 $N + n$ が少な

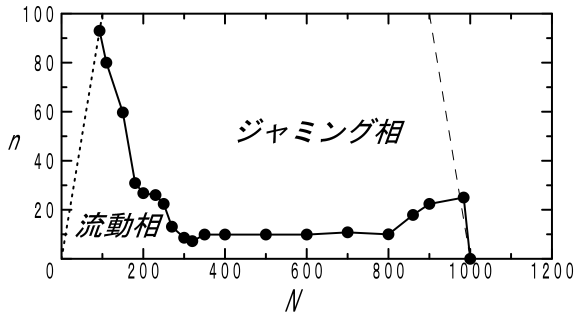

図 7: $N-n$ 空間における相図

くなると n^* の値はそれに応じて上昇している。

一方 N が約 800 以上の場合は n^* が逆に上昇している。これは予想に反することであり「異常現象」というべきであろう。つまり、総粒子数 $N+n$ が増えているにもかかわらずジャミングが逆に起こりにくくなっているのである。これは図 3 のジャミング発生率の $N \geq 800$ での低下からも読み取れる。なぜこのような異常現象が起こるのであろうか? これは総粒子数が容量 1000 個に近い値であり、粒子が高密度状態になっていることによって、同種粒子のクラスター化が阻害されることに原因があると考えられる。いま左進行粒子数 $n(\leq$ 約 20) は右進行粒子数 N(800〜990) に比べて十分少ないので前者を不純物、後者をホスト粒子と呼ぶことにする。今の場合不純物がホスト粒子に希釈されることによってジャミングが起こらないとみなすことができるである。

5　まとめと議論

通路を対面的に流れる多粒子流を、周期境界条件のセルオートマトンモデルでシミュレーション実験を行った。ジャミング状態に陥るまでの流れのライフタイム T の分布は指数関数的に減衰することがわかり、そこから特徴的な時間 T_0 を抽出した。これは平均ライフタイムの同じである。さらに、T_0 は粒子数を変えることによって、べき的発散を示すことが明らかなり、ここからジャミング-流動相転移を見出すことに成功した。T_0 や n^* の誤差は、統計処理の範囲では 1 パーセント以下のオーダーであり、相分離を判定するには十分な精度であると考えられる。

また、粒子数が高密度かつ左向き粒子の数が左向きの粒子より圧倒的小さい場合、前者は希釈されジャミングが阻害されるという異常現象が存在するこがわかった。

参考文献

[1] M.Schreckenberg et al(Ed), Pedestrian and Evacuation Dynamics, Springer(2002).

[2] 西成活裕「渋滞学」新潮選書 (2006).

[3] M.Muramatu,T.Irie and T.Nagatani, Physica A **267** (1999) 487.

[4] S.Ito,T.Nagatani and T.Saegusa, Physica A **373** (2007) 672.

[5] M.Fukamachi,R.Kuwajima,Y.Imanishi and T.Nagatani, Physica A **383** (2007) 425.

[6] R.Jiang and Q.S.Wu, Physica A **373** (2007) 683.

[7] Y.Tajima and T.Nagatani, Physica A **292** (2001) 545.

[8] W.G.Weng, L.L.Pan, S.F.Shen and H.Y.Yuan, Physica A **374** (2007) 821.