

# 不安定な遅れランダムウォーク

大平徹

(株)ソニーコンピュータサイエンス研究所

概要

本論文では時間軸上での「非局所性」の一例を不安定なランダムウォークに遅れを取り入れたモデルで考察する。特にこのようなモデルでは初期状態の影響がその後の挙動に強く反映されることを示す。

## Unstable Delayed Random Walks

Toru Ohira

Sony Computer Science Laboratories, Inc.

Abstract

We would like to discuss a random walk with delay subject to unstable potential. This is an example of dynamics with “non-locality” on the time axis. We discuss that such repulsive delayed random walks are under strong influence of initial functions.

### 1 はじめに

時間軸上での「非局所性」と「揺らぎ」をテーマとした研究を進めています [1, 2]。その一例として、不安定な状況にある遅れを含むランダムウォークを不完全ながらも議論してみたいと思います [3]。このランダムウォークの特徴は時間軸上での離れた 2 時点の状態の影響を受けることですが、特に不安定なポテンシャルと組み合わせることで、初期条件の影響が顕著にその挙動に反映されるところにあります。

### 2 モデル

ここで考えるモデルは離散時間そして離散 1 次元空間のランダムウォークを基本とします。このランダムウォークは単位時間に単位ステップを左右にとりますが、これに以下の 2 つの性質を付け加えます。

まず、遷移確率については原点を中心として左右に対称なバイアスがかかり、また、これが原点からの距離に比例する様にします。これを式としてまとめます。ここで  $f(x), g(x)$  を  $x$  にいるランダムウォークが次のステップを左 (負) と右 (正) の方向にと

ると

$$f(x) + g(x) = 1 \quad (\forall x), \quad (1)$$

が成り立ちます。また原点における対称性は

$$f(x) = g(-x) \quad (\forall x), \quad (2)$$

とすることで確保できます。ここでもし、

$$f(x) > g(x) \quad (x > 0). \quad (3)$$

であれば原点に向かうバイアスが強いのでランダムウォークは安定的となりますが、逆に

$$f(x) < g(x) \quad (x > 0). \quad (4)$$

であれば不安定的となります。前者は谷のようなポテンシャル、後者は丘のようなポテンシャルにいるようなウォーカーを定性的には考えることができます。また、

$$f(x) = g(x) = \frac{1}{2} \quad (\forall x), \quad (5)$$

であれば、これは最も普通に取り上げられている、対称単純ランダムウォークとなります。さらに原点からの距離に比例してバイアスが変化するということ

を取り入れると  $f(x), g(x)$  は例えば、以下のように定義できます。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+2d) & \text{if } x > a \\ \frac{1}{2}(1+\beta x) & \text{if } -a \leq x \leq a \\ \frac{1}{2}(1-2d) & \text{if } x < -a \end{cases} \quad (6)$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-2d) & \text{if } x > a \\ \frac{1}{2}(1-\beta x) & \text{if } -a \leq x \leq a \\ \frac{1}{2}(1+2d) & \text{if } x < -a \end{cases}$$

ここで  $d$  は  $-0.5 \leq d \leq 0.5$  となるような定数で  $a$  は比例関係がなりたつ原点からの距離を示す定数で、 $\beta = 2d/a$  とします。これにより  $-a$  と  $a$  の範囲にある間は遷移確率は  $\beta$  を比例定数として変化しますが、その外では固定値となります。これらを用いてこのランダムウォークの基本的な確率式は以下で与えられます。(  $P(n, t)$  は時刻  $t$  にウォーカーが位置  $X = n$  にいる確率.)

$$P(n, t) = g(n-1)P(n-1, t-1) + f(n+1)P(n+1, t-1) \quad (7)$$

なお、 $0 < d \leq 0.5$  では原点に安定的、 $-0.5 \leq d < 0$  では不安定的なランダムウォークとなります。図 1 にその模式図を示しました。

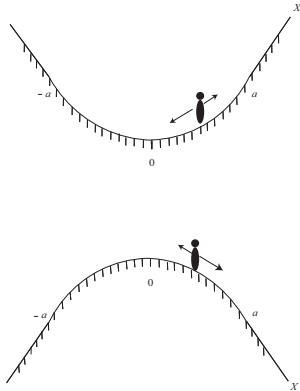


図 1: 原点からの距離に比例して、遷移確率のかわるランダムウォークの概念図。安定的な場合(上)と不安定的な場合(下)を示した。

続いて、このランダムウォークの時刻  $t$  の遷移確率が、 $t - \tau$  によって決まるという性質を付け加えます。この拡張は基本的な確率式を以下に拡張することで得られます。

$$P(n, t; m, t - \tau) = g(m-1)P(n-1, t-1; m, t-\tau; m-1, t-1-\tau) + g(m+1)P(n-1, t-1; m, t-\tau; m+1, t-1-\tau) + f(m-1)P(n+1, t-1; m, t-\tau; m-1, t-1-\tau) + f(m+1)P(n+1, t-1; m, t-\tau; m+1, t-1-\tau), \quad (8)$$

ここで  $P(x, t_1; y, t_2; z, t_3)$  はウォーカーの位置がそれぞれの時刻で  $X(t_1) = x, X(t_2) = y, X(t_3) = z$  となるような同時確率分布です。これによりウォーカーの遷移確率は今の位置ではなく、遅れ  $\tau$  前の時刻の位置によって決まるようになります。このためこのランダムウォークを遅れランダムウォークと呼びます [4, 5, 6].

粗い近似ではこの遅れランダムウォークは  $\beta \ll 1$  であれば以下の遅れ確率微分方程式と対応します [6, 7].

$$\dot{x}(t) = -\beta x(t - \tau) + \xi(t) \quad (9)$$

ここで、 $\xi(t)$  は以下の性質をもつ時間相関のないノイズ項です。

$$\begin{aligned} \langle \xi(t) \rangle &= 0 \\ \langle \xi(t)\xi'(t') \rangle &= \delta(t - t') \end{aligned}$$

### 3 特徴

この遅れランダムウォークで安定的な場合、 $0 < \beta$ 、の性質はいくつかの研究で調べられています [4, 5]. たとえば非定常状態と定常状態での自己相関関数が、遅れがある程度以上大きくなると振動すること等が解析的にも得られました。ここでは不安定的な場合、 $\beta < 0$ 、を取り上げます。

まず、安定的な場合と同じ様に自己相関関数をアンサンブル平均を用いて以下のように定義します。

$$K(u, t) = \langle X(t)X(t-u) \rangle \quad (10)$$

すると分散はこの特殊な場合で

$$\sigma^2(t) = K(0, t) \quad (11)$$

であたえられます。遅れランダムウォークの定義より、自己相関関数の時間変化は以下の相互依存する

式で与えられることが導けます [5].

$$\begin{aligned}
 K(0, t+1) &= K(0, t) + 1 - 2\beta K(\tau, t - \tau) \\
 K(u, t+1) &= K(u-1, t+1) \\
 &\quad - \beta K(\tau - (u-1), t + u - \tau) \\
 &\quad \quad (for\ 1 \leq u \leq \tau), \\
 K(u, t+1) &= K(u-1, t+1) \\
 &\quad - \beta K((u-1) - \tau, t+1) \\
 &\quad \quad (for\ u > \tau).
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

これらの式は初期条件がきまると、順次繰り返していきっていくことができます。ここでは原点に固定された以下の初期条件を用います。  $x(t) = 0, t \in [-\tau, 0]$ . これは境界条件としては

$$K(u, t) = 0 \quad (-\tau \leq t \leq 0, \forall u). \tag{13}$$

のようになります。図2では分散についてこの式よりの解と遅れランダムウォーク、そして遅れ確率微分方程式の数値計算の結果の三者を比較していますが、お互いに対応しているのが見えます。また、この初期条件では遅れが大きくなるとより原点での不安定性が和らぎ、分散の増加が遅くなるのがわかります。

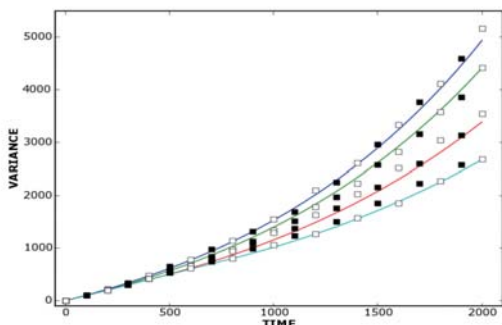


図2: 分散の時間変化について、確率微分方程式の数値解(黒四角)、ランダムウォークの数値解(白四角)、そして、連立式(12)よりの解(実線)を比較したもの。  $\beta = 0.0004$  として、遅れの値は上から  $\tau = 0, \tau = 100, \tau = 400, \tau = 800$  に設定した。

しかし、この不安定な遅れランダムウォークの特徴がもっとも端的に現れるのは、平均初通過時間  $L$  においてです [8]。ここでは原点から出発してある地点  $\pm X^*$  に至るまでの平均時間を  $L$  とします。これ

を遅れ  $\tau$  の関数としてさまざまな初期条件でプロットしたのが図3です。ここにみられるように初期条件のあり方が、大きな影響を持ちます。安定的なランダムウォークであれば遅れが存在しても、初期条件の影響は時間とともに減少していきませんが、不安定な場合は必ずしもそうではないことが見えます。非平衡統計力学からも、たとえば揺動増幅定理のような性質が不安定点における特徴としてみられています [9]。ここではさらに不安定性と遅れの兼ね合いがより初期状態の影響を先鋭化していると考えます。

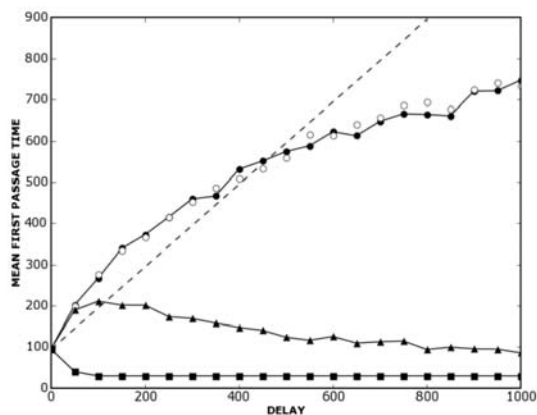


図3: 不安定な遅れランダムウォークにおいて平均初通過時間  $L$  が遅れ  $\tau$  の関数として、  $(-\tau, 0)$  の区間での違った初期条件によりどのような影響を受けるかを示した。1) 原点に固定した場合(黒丸); 2)  $+1, 0, -1$  より同確率でひとつの値を選んだ場合(白丸); 3) 遅れのない  $\tau = 0$  単純対称ランダムウォークを用いた場合(三角); 4) 線形に減少する直線的な初期条件で  $t = -\tau$  の時  $x = \tau$  と  $t = 0$  で  $t = 0$  の時  $x = 0$  にを結び初期条件の場合(四角)。(すべての場合で  $X(0) = 0$ .) 点線は  $L_{\tau=0} + \tau$  の直線。それぞれの初期条件において500回のサンプルをとり、これを平均した。パラメータは  $X^* = \pm 30, d = 0.4, a = 30$  とした。

## 4 おわりに

ここで示したモデルは単純ですが、「不安定性」、 「記憶や遅れ」そして「ゆらぎ」に影響をうけるシステムは様々に存在すると考えます。人間による倒立棒制御や歩行制御などもその一例です [10, 11]。交通流における多様な現象とこれらの要素の結びつきについても、研究をさらに積み重ねていくことも意義があるかと考えます。

## 謝辞

この研究は Claremont Colleges, U.S.A の Prof. John G. Milton そして Instituto Venezolano de Investigaciones Cientificas, Venezuela の Dr. Juan Luis Cabrera との共同研究で, 米国科学財団 (National Science Foundation) の支援 (Grant 0617072) を受けております.

## 参考文献

- [1] T. Ohira, *Physica A* **379** (2007) 483.
- [2] 大平徹, 時間軸上の非局所性とゆらぎ, *日本物理学会誌*, **60**, p. 260 (2007).
- [3] J. Milton, J. L. Cabrera and T. Ohira, (Submitted to *Euro. Phys. Lett.*).
- [4] T. Ohira and J. Milton, *Phys. Rev. E* **52** (1995) 3277.
- [5] T. Ohira and T. Yamane, *Phys. Rev. E* **61** (2000) 1247.
- [6] 大平徹, 『ノイズと遅れの数理』 (共立出版, 2006) .
- [7] 内藤敏機, 原惟行, 日野義之, 宮崎倫子, 『タイムラグを持つ微分方程式 関数微分方程式入門』 (牧野書店, 2002) .
- [8] T. Hosaka, T. Ohira, C. Luciani, J. L. Cabrera, and J. Milton, *Prog. Theoretical Phys., Suppl.* **161** (2006) 314.
- [9] 鈴木増雄, 『統計力学』 (岩波, 1994) .
- [10] J. L. Cabrera and J. Milton, *Phys. Rev. Lett.* **89** (2002) 158702.
- [11] J. L. Cabrera and J. Milton, *Chaos* **14** (2004) 691.