# 時間遅れ最適速度モデルの厳密解について

金井政宏 [1]，杉山雄規 [2]

[1] 東京大学大学院数理科学研究科
[2] 名古屋大学大学院情報科学研究科

**概要**

時間について１階微分１階差分方程式である時間遅れ最適速度モデルについて，位数２の楕円函数の解および新しい衝撃波の解を与える．楕円函数の解は既に知られている幾つかの解を簡明に表示したものであり，この表示よって既知の解が全て同一のものであることが分かる．一方，ソリトン方程式についてそのソリトン解を得る標準的な方法である広田の方法をこの時間遅れ方程式に適用し，新しい衝撃波解を得ることが出来た．この解は伝播速度を任意に選択できる点で楕円函数解と異なる．

# On exact solutions of the delay Optimal Velocity Model

Masahiro Kanai[1] and Yuki Sugiyama[2]

[1] *Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo*
[2] *Department of Complex Systems Science, Graduate School of Information Science, Nagoya University*

**Abstract**

We present two exact solutions, i.e., an elliptic solution of order 2 and a new shock solution. The present elliptic solution has the simplest form in the previously given ones, and it proves that these previous solutions are identical. We also provide another shock solution applying the Hirota method to the delay equation. The Hirota method is originally developed to obtain the soliton solutions of the soliton equations. The shock solution differs from the elliptic solution in the variable traveling velocity.

## 1　はじめに -交通流モデルの厳密解について-

交通流モデルは，ミクロ・マクロ，連続・離散，決定論的・確率論的，などと分類される．この中で，個体間に非対称な相互作用を考える追従型 (Car-following) モデルは，力学の大前提である運動の３法則に縛られない粒子の系として交通流をモデル化していて，交通流を既存の物理系から独立した新たな対象としている．

しかし一方で，相互作用の非対称性のために保存則は見出されずエントロピーによる平衡統計力学の適用範囲外となる．このような状況では，厳密解がマクロな現象の解明のために非常に有効である．通常，厳密解は極めて特殊な状況でのみ実現されるものであって，ほとんど有効性を示さないが，交通流モデルにおいては，シミュレーションにより厳密解が系の定常状態を与えていると予想される．このため交通流モデルにおいては厳密解を得ることに大きな意義がある．

## 2　交通流モデルとソリトン方程式

まず，厳密解を持つ交通流モデルとそれに関連の深い可積分系の方程式について述べる．

### 2.1　Newell-Whitham モデル

時刻 $t$ での，$n$ 番目の車の位置を $x_n(t)$，先行する車（$n+1$ 番）との車間距離を $h_n(t)$ とする．そして，車間距離 $h$ に対して最適な速度を返す函数 $V(h)$

（最適速度 (OV) 函数）を考えて，時間遅れ追従型モデル (delay Car-following model) を

$$\dot{x}_n(t+\tau) = V(h_n(t)), \quad h_n := x_{n+1} - x_n \tag{1}$$

により導入する．ここで特に

$$V(h) = V_0\left[1 - \exp\left(-(\gamma/V_0)(h-L)\right)\right] \tag{2}$$

と置いたものを *Newell-Whitham* (NW) モデルと呼ぶことにする．

#### 2.1.1 $\tau = 0$ の場合 [1]

まず，$\tau = 0$ の場合を考える．この場合は従属変数の変換により線形方程式に帰着される：

$$x_n(t) = nL - (V_0/\gamma)\log z_n(t) \tag{3}$$

と置くことにより (1) は

$$-(1/\gamma)\dot{z}_n = z_n - z_{n+1} \tag{4}$$

である．線形化された NW モデル (4) は基本解

$$z_n = a^n \mathrm{e}^{-(1-a)\gamma t} \tag{5}$$

を持ち（$a$ はパラメータ），重ね合わせにより無数の解を構成出来る．特に２つの基本解の重ね合わせは (3) より衝撃波

$$\frac{\dot{x}_n}{V_0} = 1 - \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2}\tanh\left(\frac{b-a}{2}\gamma t - \frac{n}{2}\log\frac{b}{a}\right) \tag{6}$$

を与える．

#### 2.1.2 $\tau \neq 0$ の場合 [2]

NW モデルを車間距離のみの形にすると

$$\dot{h}_n(t+\tau) = V(h_{n+1}(t)) - V(h_n(t)) \tag{7}$$

である．ここで，

$$s_n(t) = (\gamma/V_0)(h_n(t) - L) \tag{8}$$

と変数変換すると，

$$-(1/\gamma)\dot{s}_n(t+\tau) = \mathrm{e}^{-s_{n+1}} - \mathrm{e}^{-s_n} \tag{9}$$

となる．以降この式で NW モデルを考察する．

NW モデルについては，交通流と類似した系である格子系で，なおかつ可積分である *Kac-van Moerbeke* (KvM) 系 [3]

$$\dot{R}_j = \mathrm{e}^{-R_{j-1}} - \mathrm{e}^{-R_{j+1}} \tag{10}$$

と対比することにより厳密解を求めることが出来る．(9) と (10) はそれぞれ進行波

$$\begin{aligned} s(\phi) &= s_j(t), \quad \phi = \gamma(t/\tau + 2n) \\ R(\Phi) &= R_j(t), \quad \Phi = t + \beta j \quad (\beta = \gamma\tau) \end{aligned} \tag{11}$$

を仮定すればともに

$$\dot{s}(\phi) = \mathrm{e}^{-s(\phi-\beta)} - \mathrm{e}^{-s(\phi+\beta)} \tag{12}$$

という方程式に帰着される．(12) の解は，後述する戸田格子の楕円解から

$$\mathrm{e}^{s(\phi)} = \frac{[1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\beta\,\mathrm{sn}^2(\phi+\beta)][1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\beta\,\mathrm{sn}^2\phi]}{2\,\mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{cn}\,\beta\,\mathrm{dn}\,\beta} \tag{13}$$

と得られる．ただし，各楕円函数の母数は $k$ である．しかし，このように戸田格子の解から NW モデルの解を構成することは一般に容易でない．

### 2.2 戸田格子

ここで，戸田格子 [4] について簡単に触れる．戸田格子は非線形なバネによって繋がれた質点系であり，バネをポテンシャルの形で表すと

$$\phi(r) = (a/b)\mathrm{e}^{-br} + ar \quad (ab > 0) \tag{14}$$

である．そして，質点 $y_n$ の運動方程式は

$$\ddot{y}_n = a(\mathrm{e}^{-br_{n-1}} - \mathrm{e}^{-br_n}), \quad r_n = y_{n+1} - y_n \tag{15}$$

となる．以下では無次元化して，粒子間距離 $r_n$ による表示

$$\ddot{r}_n = 2\mathrm{e}^{-r_n} - \mathrm{e}^{-r_{n-1}} - \mathrm{e}^{-r_{n+1}} \tag{16}$$

を用いる．

#### 2.2.1 周期解

戸田は非線形格子で特解を持つものを構成するために楕円函数に着目した．そして，$\mathrm{sn}^2$ の公式

$$\mathrm{sn}^2(u+v) - \mathrm{sn}^2(u-v) = 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{sn}^2 v}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v} \tag{17}$$

から

$$Z(u) = \int_0^u \mathrm{dn}^2 u \mathrm{d}u - \frac{E}{K}u \tag{18}$$

（$K$, $E$ は第１種および第２種の完全楕円積分）に対して

$$\begin{aligned} &Z(u+v) + Z(u-v) - 2Z(u) \\ &\quad = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\log\left(1 + \frac{\mathrm{d}Z(u)/\mathrm{d}u}{1/\mathrm{sn}^2 v - 1 + E/K}\right) \end{aligned} \tag{19}$$

が成り立つことを見出し，さらに

$$\begin{aligned} u &= 2K(\nu \pm n/\lambda), \quad v = 2K/\lambda \\ \mathrm{e}^{-br_n} &= 1 + \dot{s}_n/a, \quad s_n(t) = \frac{2K\nu}{b/m} Z(u) \end{aligned} \tag{20}$$

と置くことにより戸田格子 (16) を得た．ただし，$\nu$, $\lambda$ はそれぞれ周期解の振動数と波長にあたるパラメータである．よって，戸田格子は必然的に

$$\mathrm{e}^{-br_n} = 1 + \frac{(2K\nu)^2}{ab/m}(\mathrm{dn}^2\, u - E/K) \tag{21}$$

という楕円函数で表される周期解を持つ．

#### 2.2.2 Kac-van Moerbeke 系

Kac-van Moerbeke 系 [3] は初め確率過程の研究の中で見出されたが，後に戸田格子の Bäcklund 変換を与えることが指摘された．Bäcklund 変換とは微分方程式の異なる２つの解を結びつける変換を指す．

戸田格子の場合，KvM 系 (10) の解に対して $w_j = R_j + R_{j+1}$ と置くと，

$$\ddot{w}_j = 2\mathrm{e}^{-w_j} - \mathrm{e}^{-w_{j-2}} - \mathrm{e}^{-r_{j+2}} \tag{22}$$

を得る．よって，$r_n = w_{2j}$, $r'_n = w_{2j+1}$ とすれば，$\{r_n\}$, $\{r'_n\}$ はそれぞれ戸田格子の解となる．そして，$r_n = y_{n+1} - y_n$, $r'_n = y'_{n+1} - y'_n$ とすれば

$$\begin{cases} \dot{y}_n = \mathrm{e}^{-(y'_n - y_n)} + \mathrm{e}^{-(y_n - y'_{n-1})} \\ \dot{y}'_n = \mathrm{e}^{-(y'_n - y_n)} + \mathrm{e}^{-(y_{n+1} - y'_n)} \end{cases} \tag{23}$$

を得る．(23) を戸田格子の Bäcklund 変換という．

### 2.3 delay Optimal-Velocity model

時間遅れ追従型モデル (1) において

$$V(h) = \tanh(h - c) + \tanh c \tag{24}$$

（$c > 0$ は定数）と置いたものを時間遅れ最適速度 (dOV) モデルと呼ぶことにする．dOV モデルの車間距離 $h_n$ による表示

$$\dot{h}_n(t+\tau) = \tanh(h_{n+1} - c) - \tanh(h_n - c) \tag{25}$$

において，進行波を仮定して $G(\phi) = \tanh(h_n(t) - c)$, $\phi = t + 2n\tau$ とすれば，

$$G'(\phi) = (1 - G(\phi)^2)(G(\phi+\tau) - G(\phi-\tau)) \tag{26}$$

を得る．また，(10) において $F(\phi) = \mathrm{e}^{-R_j(t)}$, $\phi = t + j\tau$ と置くことにより

$$F'(\phi) = F(\phi)(F(\phi+\tau) - F(\phi-\tau)) \tag{27}$$

を得る．これは Lotka-Volterra 方程式において進行波を仮定したものとなっている．そして，(27) と (26) の間には変数変換

$$F(\phi) = (1 + G(\phi))(1 - G(\phi - \tau)) \tag{28}$$

が存在する．変換 (28) は KdV 方程式と modified KdV 方程式の間の変数変換（Miura 変換）と実質的に同一である．また，mKdV 方程式は KdV 方程式の Bäcklund 変換を与えている．

## 3 dOV モデルの厳密解

dOV モデルについては，(26) に対して楕円関数解がいくつか発見されている [5]．しかし，これらは実質的に同一の解である．特に第２の解と第３の解 [5] は Landen 変換により移りあう．

### 3.1 広田の方法による解法

まず，広田の方法 [6] による dOV モデルの解法を示す [7]．(25) において

$$\tanh(h_n(t) - c) = f_n(t)/g_n(t) \tag{29}$$

と置き，$f = f_n(t)$, $f^{\pm} = f_n(t \pm \tau)$, $f_+ = f_{n+1}(t)$ などと書くことにすると，

$$\frac{\dot{f}g - f\dot{g}}{g^2 - f^2} = \frac{f_+^- g^- - f^- g_+^-}{g_+^- g^-} \tag{30}$$

となる．（ただし，時間遅れを右辺に移した．）よって，分離パラメータを $\lambda$ として双線形形式

$$\begin{cases} \dot{f}g - f\dot{g} = \lambda(f_+^- g^- - f^- g_+^-) \\ g^2 - f^2 = \lambda g_+^- g^- \end{cases} \tag{31}$$

を得る．双線形形式では特解の推定が著しく簡単になっている．例えば，ソリトン方程式の場合には双線形形式で

$$\begin{aligned} f_{\text{1-soliton}} &= 1 + A_1 \mathrm{e}^{\xi_1} \\ f_{\text{2-soliton}} &= 1 + A_1 \mathrm{e}^{\xi_1} + A_2 \mathrm{e}^{\xi_2} + A_{12} \mathrm{e}^{\xi_1 + \xi_2} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{32}$$

などと置くことにより $N$-ソリトン解が求められる．

#### 3.1.1 衝撃波解

ソリトン方程式の場合 (32) を参考にして，(31) で

$$f = A_1 + A_2 \mathrm{e}^{bt+an}, \quad g = B_1 + B_2 \mathrm{e}^{bt+an} \tag{33}$$

と置き，得られた双線形形式から (33) の各定数を決定すると

$$f = 1{+}\mathrm{e}^{bt+an}, \quad g = \frac{1-b-\mathrm{e}^{-2b\tau}}{1-\mathrm{e}^{-2b\tau}}\left[1+\mathrm{e}^{b(t-\tau)+an}\right] \tag{34}$$

および分散関係式

$$\mathrm{e}^{-a} = (b+1-\mathrm{e}^{2b\tau})/(b-1+\mathrm{e}^{2b\tau}) \tag{35}$$

を得る．よって，$a$ または $b$ を自由パラメータとすることが出来る．同様にして，NW モデルに対しても自由パラメータを含む解を構成出来る．

#### 3.1.2　楕円解

再び (26) と同様に $f_{n+1}(t-\tau) = f_n(t+\tau)$ と仮定する．すなわち (31) で $f_+^- = f^+$ とすると，第1の解 [5] は，(31) の第２式と $\vartheta$ 函数の加法公式

$$\begin{aligned}&[\vartheta_0(0)]^2\vartheta_0(u+v)\vartheta_0(u-v)\\ &\qquad = [\vartheta_0(u)\vartheta_0(v)]^2 - [\vartheta_1(u)\vartheta_1(v)]^2\end{aligned} \tag{36}$$

と見比べて

$$f = \vartheta_1(\tau)\vartheta_1(\phi), \quad g = \vartheta_0(\tau)\vartheta_0(\phi), \quad \lambda = [\vartheta_0(0)]^2 \tag{37}$$

と置くことにより（実は第１式も満たされるので）

$$G(\phi) = \frac{\vartheta_1(\tau)\vartheta_1(\phi)}{\vartheta_0(\tau)\vartheta_0(\phi)} = k\,\mathrm{sn}(2K\tau)\,\mathrm{sn}(2K\phi) \tag{38}$$

と得られる．ここで，$\sqrt{k}\,\mathrm{sn}(2Ku) = \vartheta_1(u)/\vartheta_0(u)$ を用いた．

### 3.2　位数２の楕円函数解

楕円函数については一般に次のことが成り立つ：

(1) 重複を込めた極の総数と零点の総数は等しい．
(2) 留数の総和は 0 である．
(3) 極あるいは零点を２点以上持たない楕円函数は定数に限る．

そこで，(26) に対して２点 $\phi = \pm a$ で留数 $\pm A$ の１位の極を持つ楕円函数

$$f(\phi) = B + A\zeta(\phi+a) - A\zeta(\phi-a) \tag{39}$$

を解と仮定する．ただし，$f(\phi)$ の２重周期を $\Lambda = (\omega_1, \omega_2)$ とする．ここで，

$$\zeta(t) = \frac{1}{t} + \sum_{\omega\in\Lambda}\left(\frac{1}{t-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{t}{\omega^2}\right) \tag{40}$$

は Weierstrass の $\zeta$ 関数である (39) は位数２の楕円函数の最も一般的な形である．$f(\phi)$ を (26) に代入して公式

$$\zeta' = -\wp, \quad (\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3 \tag{41}$$

$$\zeta(u+v) + \zeta(u-v) - 2\zeta(u) = \frac{\wp'(u)}{\wp(u)-\wp(v)} \tag{42}$$

を用いて定数 $a, A, B$ を決定することにより

$$\begin{aligned}G(\phi) = \pm\frac{1}{4}\Big[&\zeta(\tau+2a) - \zeta(\tau-2a)\\ &- 2\zeta(t+a) + 2\zeta(t-a)\Big]\end{aligned} \tag{43}$$

を得る．ただし，$a$ は

$$\wp(2a) = \wp(\tau) + \wp'(\tau)/4 \tag{44}$$

により決定される．ただし，$\wp(u)$ は Weierstrass の $\wp$ 函数である．従って，二つの周期 $\omega_1, \omega_2$ が自由パラメータとなる．

## 4　まとめ

本研究では，時間遅れ追従型モデルの解法および厳密解についてまとめた．これらのモデルは，時間遅れ $\tau$ と車の番号のずれを同時に対称化するための条件 (HNS condition[5]) によって，戸田格子を中心とする可積分方程式に関係付けられている．

一方，HNSc は解に位相速度を $1/(2\tau)$ とする制限を課すが，広田の方法により得られた衝撃波解はこの制限を受けない．よって，NW モデルや dOV モデルの可積分系との関係の追求と広田の方法により見えてきた新しい構造の解明が今後の課題となる．

## 参考文献


[1] G. F. Newell, *Oper. Res.* **9** (1961) 209.
[2] G. B. Whitham, *Proc. R. Soc. Lond.* A**428** (1990) 49.
[3] M. Kac and P. van Moerbeke, *Adv. Math.* **16** (1975) 160.
[4] 戸田盛和,『非線形格子力学』，岩波書店 (1978).
[5] 長谷部勝也，中山章宏，杉山雄規,『第 11 回交通流シンポジウム講演集』(2005)，61，およびその参考文献
[6] 広田良吾,『ソリトンの数理』，岩波書店 (1992).
[7] Y. Tutiya and M. Kanai, *J. Phys. Soc. Jpn.* **76** (2007) 083002.