

OV 模型の N 体問題

益岡克年¹, 石田貴浩¹, 杉山雄規²

¹ 名古屋大学 情報文化学部

² 名古屋大学 情報科学研究科 複雑系科学専攻

概要

散逸多体粒子系での粒子数 N 依存性についての特徴を考察する。そのため、散逸系クラスタ解を持つ OV 模型について、粒子数 N に依存する現象 (N 体問題) を数値的及び解析的 (厳密解を含む) に研究する。この系の特徴として、少数の集団で充分大きな数の多体系として振舞うことがわかる。

N -body problem of OV model

Katsutoshi Masuoka¹, Takahiro Ishida¹, Yuki Sugiyama¹

¹ Faculty of Information and Culture, Nagoya University

² Department of Complex Systems Science, Nagoya University

Abstract

Dynamics of non-equilibrium dissipative system with asymmetric interaction is studied as N -body problem using OV model. The small- N is large enough degree of freedom in such many-particle systems. They contrast sharply with the energy-momentum conserved systems.

1 はじめに

非線形相互作用する粒子の運動において、エネルギーが保存する系では、ソリトンと呼ばれるクラスタ解があり、粒子数 N が少ない場合でもその本質を示している。しかし、散逸系での N 依存性はどうなのか？エネルギー運動量が保存しない、非対称相互作用を持つ散逸系である OV 模型について、 N 体問題を数値的及び解析的に研究した。特に、階段関数 OV 模型の場合にはクラスタ解が厳密に求まり、系の N 依存性の特徴が得られた。また、 N に依存する相構造の定性的差異も見出された。

2 線形安定性再訪

OV 模型の基礎方程式は、($n = 1, 2, \dots, N$)

$$\frac{d^2 x_n}{dt^2} = a \left\{ V(\Delta x_n) - \frac{dx_n}{dt} \right\} \quad (1)$$

x_n は n 番目の粒子の位置、 $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ は前方間隔、 $a (> 0)$ は感応度、 $V(\Delta x)$ は OV 関数である。

一様流が線形不安定になるのは、以下の式を満たす波数モードが一つでも存在する場合である [1]。

$$a < 2V'(b) \cos^2 \frac{k}{2}, \quad k = \frac{2\pi}{N}n, \quad (n = 0, 1, \dots, N-1) \quad (2)$$

図 1 左は 3 体の場合である。一般の N の場合も同様で、線形安定性による相図は図 1 右のようになる。

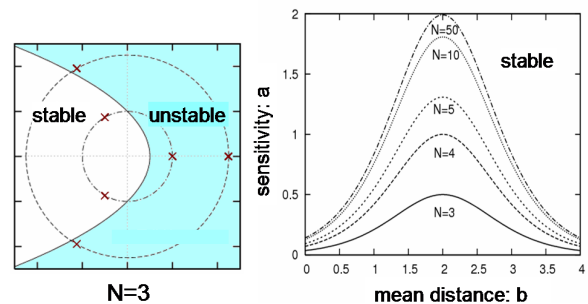


図 1: 左: $N = 3$ での線形解析、半径の大きい場合 (a が小さい) は不安定モードが出現。右: $V = \tanh$ 関数の場合の臨界曲線の N 依存性。

3 3体問題

一様流解が不安定な場合、3体でもクラスタ解が現れる。OV関数をstep関数 $\theta(x) = 0, (x < d), v_{max}, (x \geq d)$ の場合の結果が図2である。

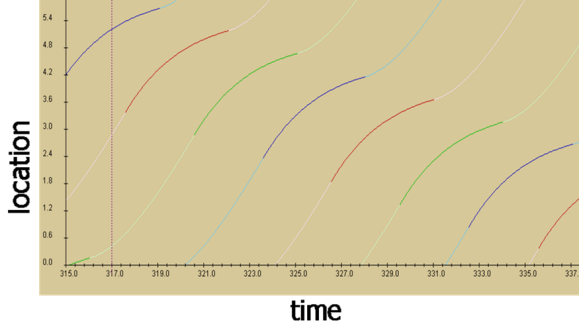


図2: 3体step関数OV模型の各粒子(赤・青・緑)の時空間トレース図。

図4は相空間上でのリミットサイクルである。

実は、数値計算による振舞いを観察して得られる定性的情報から、厳密解を求めることができる。3粒子の $(\Delta x < d, \Delta x \geq d)$ の状況により2つの特徴的時間 T_S, T_L と2つの速度 v_S, v_L 及びクラスタの移動速度 v_c を未知数とし、 $\Delta x = d$ における粒子間隔 i)ii) 及び速度 iii)iv) の2つずつの接続条件とクラスタの移動速度を考慮した3つの粒子の位置関係への回帰時間の関係 v) の、以下の5つの関係式より、5つの未知数 v_S, v_L, T_S, T_L, v_c を決定できる。(注) 周期: $T = 3\tau$, 特徴的時間遅れ: $\tau = T_S + T_L$ は T_S, T_L から与えられる。)

i) $d = \Delta x_{S \rightarrow L}$:

$$d = v_{max}\tau - \frac{v_{max} - v_S}{a} \{1 - e^{-a\tau}\} + v_c\tau$$

ii) $d = \Delta x_{L \rightarrow S}$:

$$d = \frac{v_L}{a} \{1 - e^{-a\tau}\} + v_c\tau$$

iii) $v_L \rightarrow v_S$:

$$v_S = v_L e^{-a(\tau+T_L)}$$

iv) $v_S \rightarrow v_L$:

$$v_L = v_{max} - (v_{max} - v_S)e^{-a(\tau+T_S)}$$

v) $x(T) = x(0) + 3v_c\tau$:

$$L = \frac{v_L}{a} \{1 - e^{-a(\tau+T_L)}\} + v_{max}(\tau + T_S) - \frac{v_{max} - v_S}{a} \{1 - e^{-a(\tau+T_S)}\} + 3v_c\tau$$

$L/N = d$ の場合は対称性より、 $N = 3$ で $T_S =$

$T_L = \tau/2, T = 3\tau, v_{max} = v_S + v_L$ となり、比較的簡単に解くことができる。

$$v_L = \frac{v_{max}}{e^{-\frac{3}{2}a\tau} + 1}, \quad v_S = \frac{v_{max}}{e^{\frac{3}{2}a\tau} + 1}$$

$$v_c = \frac{d - \frac{1}{2}v_{max}\tau}{\tau}$$

$$a\tau(1 + e^{-\frac{3}{2}a\tau}) = 2(1 - e^{-a\tau})$$

これにより、クラスタ解における各粒子の運動は完全に決まり、リミットサイクルも解析的に得られる。

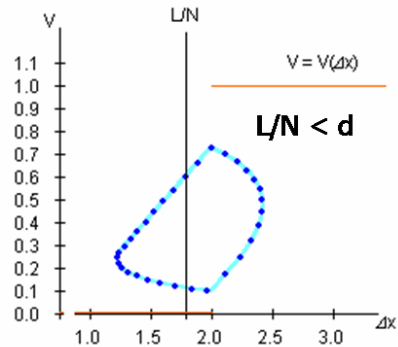
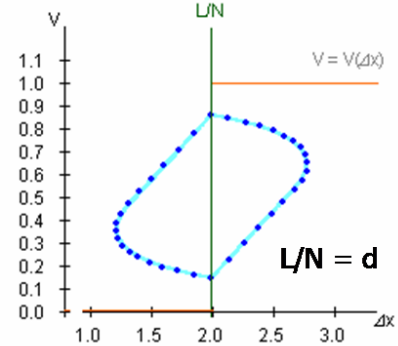
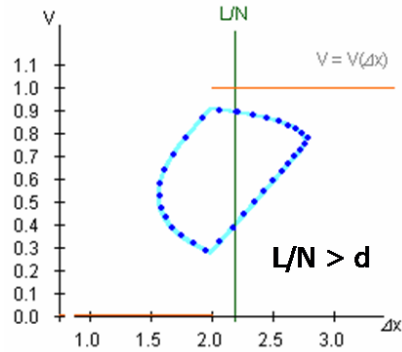


図3: 3体step関数OV模型のクラスタ解のプロフィール。平均密度によって形状が異なる。

$L/N \neq d$ の場合を解くのはずっと難しくなる。リミットサイクルのプロファイルから推測できるように、OV 関数が偏極点で対称であるにもかかわらず、(3 体系の場合は)2 体のクラスタ前方の粒子に近づく挙動と後方の粒子から離れる挙動が対称でないの、5 つの未知数がすべて独立になることによる。

以上の事情は $V = \tanh$ 関数の場合でも同様である。この場合にも $N = 3$ でクラスタ解が現れるが、同じ N でもリミットサイクルは L/N に依存し、 $L/N \neq d$ では非対称性が見える。

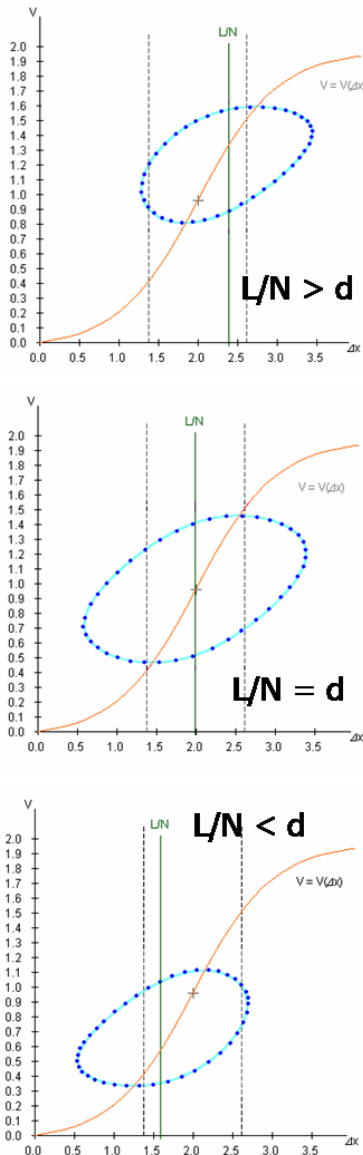


図 4: 3 体 \tanh 関数 OV 模型のクラスタ解のプロファイル。平均密度によって形状が異なる。

4 N 依存性

3 体の場合に見られた N が少数のときの密度 L/N 依存性は、 N が多数になるとともに消えていく。また、系の振る舞いの粒子数 N 依存性自体が粒子数の増加に伴い急速になくなる。それは、2 節の線型解析により得られた臨界曲線の N 依存性が $N = 30$ 程度で、 $N \rightarrow \infty$ とほぼ同一であることからも見える。step 関数 OV 模型では、更に少数の粒子系で $N \rightarrow \infty$ と同じ振る舞いをする。前節の 3 体問題の厳密解の形から、少なくとも $L/N = d$ の場合の解の N 体の場合の解を推測できるだろう。実際、 N 依存の違いは、(注:) の関係式の形 ($\Delta x < d$, $\Delta x \geq d$) の状況に N 個の粒子を配置するパッキング問題) と v の N ファクタだけである。

例えば、最も重要な $a\tau$ を決める関係式の N 依存性は、

$$a\tau(1 + e^{-\frac{N}{2}a\tau}) = 2(1 - e^{-a\tau}). \quad (3)$$

となる。 $N \rightarrow \infty$ で (3) は以前に求めた結果に極限し、その解は $a\tau = 1.59..$ である [2]。一般の $a\tau$ の N 依存性を図 5 に示す。 $N = 10$ 程度で $a\tau$ は殆ど

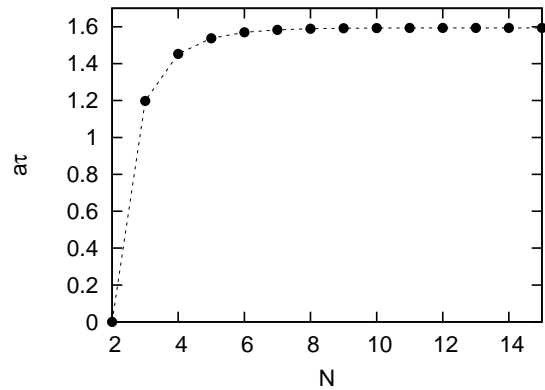


図 5: (3) の解 $a\tau$ の N 依存性

$N = \infty$ と同じである。

クラスタの移動速度 v_c の表式は陽には N に依らず (与えられた a で決まる) τ のみで決まり

$$v_c = -\frac{d - \frac{1}{2}v_{max}\tau}{\tau}, \quad (4)$$

$N = 10$ 程度で無限系とクラスタの運動と同一となる。リミットサイクルのプロファイルを解析的に求めるには N ごとに解く必要があるが、その形の N 依存性は図のようになる。 $N = 10$ 程度で以前に求めた無限系のリミットサイクルと同一になる。

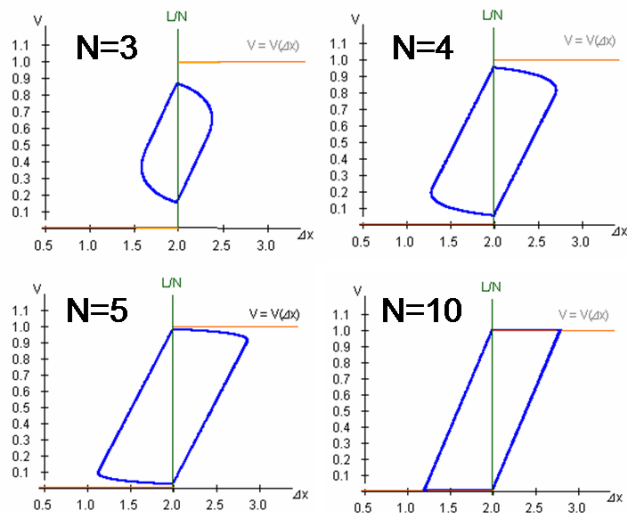


図 6: step 関数 OV 模型のリミットサイクルの N 依存性 ($L/N = d$ の場合)

$V = \tanh$ 関数のような連続関数の OV 模型では、一様流解とクラスタ流解の両方とも安定な共存相の存在が知られている。 N が少数の場合、この性質は定性的な変化を受ける。図 7 は数値計算による結果である。 N が少数の場合、共存相の内部にクラスタ解のみが安定で一様流解が不安定な領域が覆われてはならず、不安定性の高い密度領域では線型安定性のみで相転移の振る舞いが支配されていると思われる。これは、 N が小さい場合のクラスタ解のプロファイルの密度依存による非対称性によると思われるが詳しくは調べられていない。

5 まとめ

散逸多体粒子系での粒子数 N 依存性についての特徴を考察するため、散逸系でクラスター解を持つ OV 模型について、 N 体問題を研究した。その結果 3 体以上であれば、 a によって必ず一様解の不安定性が起こり、クラスタ解が発生することが見出された。エネルギーが保存する平衡系では、相転移は厳密には無限多体系でないと起こらないが、OV のような非平衡散逸系では、ごく少数で“動的な相転移”が起こる。また、induce される巨視的時間スケールや巨視的 object の速度など、クラスタ解の振る舞いは、 N 少数系ですでに無限系と同じであることより、少数で充分大きな自由度の多体系として振舞うことがわかる。これらの性質は、OV 模型のような非対称

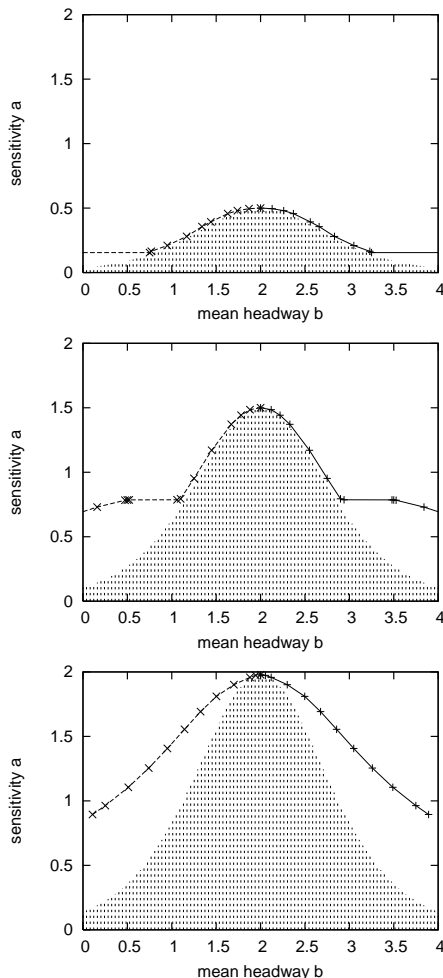


図 7: $V = \tanh$ 関数 OV 模型の相図の N 依存性

相互作用する散逸多体系の特徴であり、通常の運動量・エネルギーが保存する系と異なる、散逸多体系の一般的性質であることが推測される。

参考文献

- [1] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata and Y. Sugiyama, Phys. Rev. E **51**, pp. 1035 (1995); Japan J. of Ind. and Appl. Math. **11**, pp. 203 (1994).
- [2] Y. Sugiyama and H. Yamada, Physical Review E **55**, pp. 7749 (1997)