

散逸系における非対称相互作用と Hopf 分岐

- OV-model の連続体近似による解析 -

山本眞巳¹, 野村保之², 齋藤理史¹, 渡辺宙志¹, 杉山雄規¹

¹ 名古屋大学 情報科学研究科 複雑系科学専攻

² 福井高専電子情報工学科

概要

非線形散逸微分方程式である OV モデルは一様流解と移動クラスタ解を持つ。この 2 つの解はコントロールパラメータの変化によって安定性が移り変わり、クラスタ解がリミットサイクルのプロファイルを持つことにより、Hopf 分岐を示唆することが数値計算により知られている。OV モデルの連続体近似によって、解析的に 1) Hopf 分岐点が存在し、相互作用の非対称性がその理由であることを示し、2) Hopf 分岐の性質を調べることができる定常伝播解の力学系を導く。

Asymmetric Interaction in Dissipative System and Hopf Bifurcation

Masami Yamamoto¹, Yasuyuki Nomura², Satoshi Saito¹,
Hiroshi Watanabe¹, Yuki Sugiyama¹

¹ Department of Complex Systems Science Graduate School of Information Science Nagoya University

² Fukui National College of Technology

Abstract

OV model is a nonlinear dissipative equation. The model has two kinds of solutions; one is homogeneous flow solution, the other is moving cluster solution. In numerical analysis, a homogeneous flow solution becomes unstable and a moving cluster solution appears, if a sensitivity parameter exceeds a certain critical value. Using the continuum system derived from the original OV model, we analytically show that the transition between the two solutions corresponds to Hopf bifurcation, which is caused by asymmetric interaction.

1 はじめに

OV モデルにおける一様流解から移動クラスタ解（渋滞流解）への安定性の変化は、Hopf 分岐現象であることが指摘されているが、それを解析的に示した研究例は少ない。本論文では、車両数 N の大きい場合の連続体近似を使って OV モデルが Hopf 分岐点を持ち、その理由が非対称な相互作用によるものであることを解析的に示し、さらに Hop 分岐の性質を調べるための力学系を導出する。

2 OV モデル

2.1 離散系の OV モデル

OV モデルは次の式で与えられる。

$$\dot{x}_n = a\{V(\Delta x_n) - \dot{x}_n\}. \quad (1)$$

n は粒子番号（進行方向の順）、 a は感応度パラメータ、 $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ は前方間隔である。 $b = L/N$ は平均の粒子間隔で、 N は全粒子数、 L はレーン長である。 $V(\Delta x_n)$ は OV 関数である。

この方程式は、一様流解 $x_n = bn + V(b) + const$ を持つ。線形解析の結果として $a \leq 2V'(b)$ のとき、一様流解は不安定になることが知られている [1]。

2.2 連続体モデル

連続体モデルを導出する。 r_n と \tilde{V} を $r_n = \Delta x_n - b$, $\tilde{V}(r) = V(r + b)$ と定義する。式 (1) を r_n と \tilde{V} によって書き直すと、

$$\ddot{r}_n = a\{\tilde{V}(r_{n+1}) - \tilde{V}(r_n) - \dot{r}_n\} \quad (2)$$

となる。 r_n は平均間隔 b の一様流解からの差である。 n を独立変数とみなし、 n に対応する連続変数 x を $x = n(L/N) = bn$, ($N \rightarrow \infty, L \rightarrow \infty, L/N = b$) のように連続極限をとって定義する。(2) の非対称相互作用をシフトオペレータ $\exp \frac{\partial}{\partial n}$ を使って書き、 x を用いて $r_n(t) = r(x, t)$ として (2) を書き直せば、

$$\frac{\partial^2 r(x, t)}{\partial t^2} = a\left\{(\exp b \frac{\partial}{\partial x} - 1)\tilde{V}(r(x, t)) - \frac{\partial r(x, t)}{\partial t}\right\} \quad (3)$$

という間隔分布 r についての偏微分方程式となる [2]。

3 線形安定性解析

$\tilde{V}(r)$ を線形近似し、 $r \sim e^{ikx} e^{zt}$, $z \equiv \sigma - i\omega$ (σ, ω は実数) として解 $r(x, t) = 0$ の線形安定性を調べる。 k は波数であり、 $-\infty$ から ∞ までの連続な値をとる。 R, θ を次のように定義する。

$$R \equiv a\tilde{V}'(0), \quad \theta \equiv kb \quad (4)$$

σ と ω の関係式は次のようになる。

$$\begin{cases} \sigma^2 - \omega^2 = R(\cos \theta - 1) - a\sigma \\ -2\sigma\omega = R \sin \theta + a\omega \end{cases} \quad (5)$$

方程式 (5) を解くと、以下の解を得る。

$$\sigma_{\pm} = -\frac{1}{2}a \quad (6)$$

$$\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2 - 8R \sin^2 \frac{\theta}{2} + \sqrt{16R(4R - a^2) \sin^2 \frac{\theta}{2}}}{2}}$$

$$\omega_{\pm} = \frac{R \sin \theta}{\mp \sqrt{\frac{a^2 - 8R \sin^2 \frac{\theta}{2} + \sqrt{16R(4R - a^2) \sin^2 \frac{\theta}{2}}}{2}}} \quad (7)$$

(6) から 解 $r = 0$ が不安定となる条件は次のようになる。

$$\frac{a^2}{R} \leq 2 \quad (8)$$

この条件は元の OV モデルでの線形安定性解析の結果と一致する [2]。

4 Hopf分岐

4.1 Hopf分岐点の存在

連続体モデルの解析により OV モデルが Hopf 分岐点を持つことを示す。Hopf 分岐点を持つとは、「自励系を表す方程式で、時間に陽に依存しない部分の線形化行列の複素固有値が、コントロールパラメータ $a = a^c$ (分岐点) のとき純虚数値をとり、その後で実部が符号を変える」ことである。 r_n の方程式 (2) より $v_n \equiv \dot{r}_n$ として定義される自励系は

$$\begin{cases} \dot{r}_n = v_n \\ \dot{v}_n = a\{\tilde{V}(r_{n+1}) - \tilde{V}(r_n) - v_n\} \end{cases} \quad (9)$$

である。この自励系が Hopf 分岐点を持つには、連続体モデル (3) の固有値 z が Hopf 分岐の条件を満たせばよい。

実際、与えられた b に対して解 (6) より σ の a 依存性を調べると、臨界点の条件 $a^c = 2V'(b)$ を満たす $a = a^c (> 0)$ で $\sigma = 0$ になり、固有値は純虚数となる。更に a^c での導関数の値が 0 ではないような k が存在するので、実部 σ は $a = a^c$ の前後で符号を変える。したがって、連続体モデルは Hopf 分岐点を持つ。

4.2 非対称相互作用の効果

次に、Hopf 分岐点が出現する理由を考える。一般的な非対称相互作用の効果について、通常の対称な相互作用 (作用反作用の法則が成り立つ) と比較考察するため、元の OV モデル (1) に後方の粒子との相互作用 $W(\Delta x_{n-1})$ を加えると、モデルの式は次のようになる [3]。

$$\ddot{x}_n = a\{V(\Delta x_n) - W(\Delta x_{n-1}) - \dot{x}_n\} \quad (10)$$

前と同様に、(10) の連続体モデルは次のようになる。

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = a\left\{(\exp b \frac{\partial}{\partial x} - 1)\tilde{V}(r) - \left(1 - \exp\left(-b \frac{\partial}{\partial x}\right)\right)\tilde{W}(r) - \frac{\partial r}{\partial t}\right\} \quad (11)$$

この場合、(5)に対応する方程式は

$$\begin{cases} \sigma^2 - \omega^2 = (R + Q) \cos \theta - a\sigma \\ -2\sigma\omega = (R - Q) \sin \theta + a\omega \end{cases} \quad (12)$$

となる。ここで、 $Q \equiv a\tilde{W}(0)$ 、 R と θ は先の定義と同じである。相互作用が対称 $Q = R$ の場合、実部 $\sigma = 0$ とすると方程式 (12) より虚部 ω の解は 0 のみとなるので、純虚数解は存在せず Hopf 分岐の条件を満たさない。一方、 $Q \neq R$ の場合は、 $\sigma = 0$ とすると ω^2 についての 2 次方程式が得られ、しかも必ず正の解を持つので、 z は共役な純虚数の固有値を持ち、Hopf 分岐点が存在する。このように、相互作用の非対称性が Hopf 分岐を引き起こす。

5 定常伝播解の力学系

5.1 力学系と Hopf 分岐条件

連続体モデルの解析により、OV モデルは Hopf 分岐点を持つことが示された。しかし、以上の解析では、Hopf 分岐のタイプ (e.g. supercritical 分岐か、subcritical 分岐か) を決めることはできない。その解析のために、 (x, t) 空間におけるクラスタの伝播速度を c とし、定常伝播解 $r(x, t) = r(\xi)$ 、 $\xi \equiv x - ct$ を仮定し、偏微分方程式である連続体モデル $\text{eqref{eq-continuous}}$ をこの解を想定した自励系に表現する。この力学系を確定するためにはクラスタの速度 c を評価する必要があるが、これは 5.2 節で議論する。

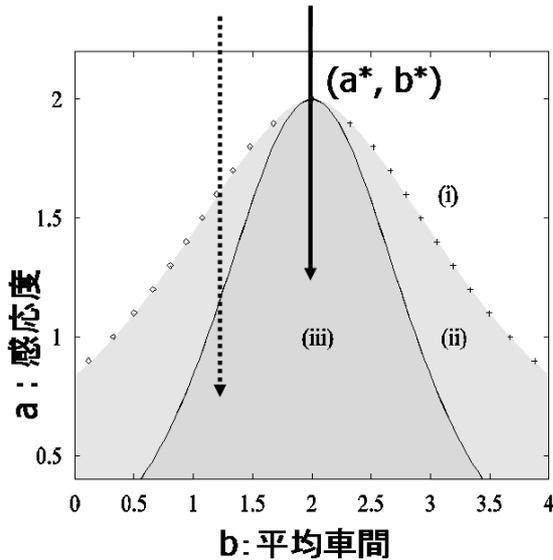


図 1: 相図: 実線が線形安定性の臨界曲線。i) 一様流解, iii) クラスタ流解の安定相, ii) 共存相

定常伝播解の仮定を (3) に代入し力学系を導く。相互作用の非対称性を考慮し $\exp b \frac{\partial}{\partial x}$ を 3 次の項まで展開し、 ξ で積分すると

$$c^2 \frac{du}{d\xi} - car - a \left\{ b + \frac{b^2}{2} \frac{d}{d\xi} + \frac{b^3}{6} \frac{d^2}{d\xi^2} \right\} \tilde{V}(u) = 0 \quad (13)$$

を得る。 $u \equiv r$ 、 $\frac{du}{d\xi} \equiv v$ と定義すると、力学系は

$$\begin{cases} \frac{du}{d\xi} = v \\ \frac{dv}{d\xi} = \frac{6}{ab^3 \tilde{V}'(u)} \left(c^2 v - car - ab \tilde{V}(u) \right) - \frac{3v}{b} - \frac{\tilde{V}''(u)}{\tilde{V}'(u)} v^2 \end{cases} \quad (14)$$

と書け、一様流解はこの系の固定点に対応する [2]。

この系を固定点 $(0, 0)$ の周りで線形化し固有値を求める。Jacobi 行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{6c}{ab^3 \tilde{V}'(0)} - \frac{6}{b^2} \left(1 - \frac{\tilde{V}(0) \tilde{V}''(0)}{\tilde{V}'(0)^2} \right) & -\frac{3}{b} + \frac{6c^2}{ab^3 \tilde{V}'(0)} \end{pmatrix} \quad (15)$$

となり、その固有方程式は、

$$\lambda^2 - \left(-\frac{3}{b} + \frac{6c^2}{ab^3 \tilde{V}'(0)} \right) \lambda + \left(\frac{6c}{ab^3 \tilde{V}'(0)} + \frac{6}{b^2} \left(1 - \frac{\tilde{V}(0) \tilde{V}''(0)}{\tilde{V}'(0)^2} \right) \right) = 0 \quad (16)$$

である。パラメータ $a = a^c$ が Hopf 分岐点ならば λ の実部は 0 であることより、 a^c は

$$\lambda + \bar{\lambda} = -\frac{3}{b} + \frac{6c^2}{a^c b^3 \tilde{V}'(0)} = \frac{3(-2c^2 + a^c b^2 \tilde{V}(0))}{a^c b^3 \tilde{V}'(0)} = 0 \quad (17)$$

満たさなくてはならない。上の式を c^2 について解くと、

$$c^2 = \frac{1}{2} a^c b^2 \tilde{V}'(0) \quad (18)$$

となり、Hopf 分岐の条件を満たすための c と a^c , b の関係式を得る。

5.2 Hopf 分岐点における c の評価

図 1 で臨界曲線の極大点を (a^*, b^*) とする。以下では $b = b^*$ と固定し、 (a^*, b^*) 近傍で図 1 の実線矢印の a の変化を考え、このときの Hopf 分岐の性質を調べるための力学系を確定する。

そのために、クラスタの伝播速度 c を評価する。粒子数 N が大きいとき、移動クラスタ解のリミットサイクルの情報から実空間におけるクラスタの速度 V_{back} は、以下の式で与えられる [4]。

$$V_{back} = -\frac{\Delta x_J V(\Delta x_F) - \Delta x_F V(\Delta x_J)}{\Delta x_F - \Delta x_J} \quad (19)$$

Δx_F は最高速度の粒子間隔、 Δx_J はクラスタ中の間隔で、リミットサイクルの上下の端点である。

図 2 に見るように、リミットサイクルは $a \leq a^*$ で現れ、その大きさは a に依存する。OV 関数を変曲

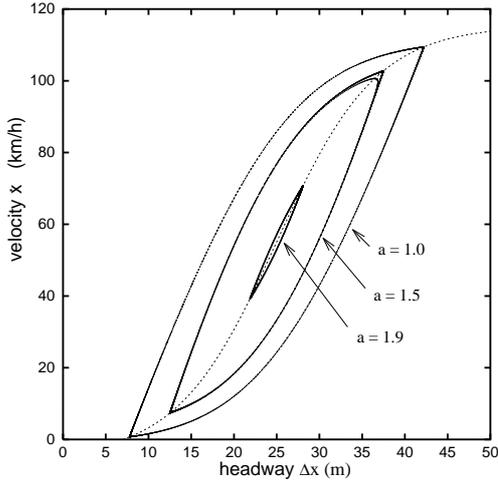


図 2: リミットサイクルの a 依存性: $a^* = 2$

点 $(b^*, V(b^*))$ について対称であるとする、リミットサイクルはこの点に関して対称であり、 $a \lesssim a^*$ では $\varepsilon(a) \equiv O(a - a^*)$ として $\Delta x_J = b^* - \varepsilon(a)$, $\Delta x_F = b^* + \varepsilon(a)$ と書ける。臨界点 (a^*, b^*) のときの V_{back} は、式 (19) で極限 $a \rightarrow a^*$ をとることで得られ、

$$V_{back}^* = -b^* V'(b^*) + V(b^*) \quad (20)$$

となる。

また、一般に実空間でのクラスタの伝播速度 V_{back} とインデックス空間での伝播速度 c の関係は、Euler-Lagrange 変換より次のようになる。

$$c = V_{back} - V(b) \quad (21)$$

さて、 $b = b^*$ の場合は $a^c = a^*$ であり、このときの c を c^* と記す。(20), (21) より

$$c^* = V_{back}^* - V(b^*) = -b^* V'(b^*) \quad (22)$$

となり、

$$(c^*)^2 = (b^* V'(b^*))^2 \quad (23)$$

である。一方、Hopf 分岐の条件 (18) と臨界条件 $a^* = 2V'(b^*) = 2\tilde{V}'(0)$ より

$$(c^*)^2 = \frac{1}{2} a^* b^{*2} \tilde{V}'(0) = (b^* V'(b^*))^2 \quad (24)$$

である。よって、リミットサイクルから決定した c^* の表式は Hopf 分岐の条件を満たしており、 (a^*, b^*) が Hopf 分岐点であることと整合していることがわかる。連続体モデルから導いた力学系が臨界点 (a^*, b^*) において OV モデルと整合性を持って確定された。

6 今後とまとめ

前節で確定した c^* を基点に、

i) supercritical 分岐に対応する場合、図 1 (実線矢印): $b = b^*$ で $a \lesssim a^*$ のとき、 $\varepsilon(a)$ の 2 次まで V_{back} を評価すると ($V''(b^*) = 0$ より 1 次の項 = 0.)

$$V_{back} = V_{back}^* + \varepsilon(a)^2 \frac{V'''(b^*)}{3!} \quad (25)$$

となり、これより $c(a)$ を確定する。さらに、

ii) subcritical 分岐に対応する場合、図 1 (点線矢印): $b \neq b^*$ 一定 ($V''(b) \neq 0$) で $a \lesssim a^c$ のとき、 $c(a)$ を確定する。それぞれの場合で、Hopf 分岐のタイプを決定することが今後の作業である。

本論文では、OV モデルの連続体近似によって、

1) Hopf 分岐点が存在し、相互作用の非対称性がその理由であること、2) Hopf 分岐の性質を調べるために導出した定常伝播解の力学系が、整合性を持って確定できること、を示した。

この研究は、名古屋大学 21 世紀 COE プログラム「計算科学フロンティア」の援助を受けて行われた。

参考文献

- [1] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata, and Y. Sugiyama, Phys. Rev. E **51** (1995) 1035.
- [2] 山田裕康, 柴田章博, 杉山雄規, 第 2 回交通流シミュレーションシンポジウム講演概要集, (1995) 12.
- [3] A. Nakayama, Y. Sugiyama, K. Hasebe, Phys. Rev. E **65** (2001) 016112.
- [4] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, K. Nakanishi, A. Shibata and Y. Sugiyama, Journal de Physique I France **5** (1995) 1389