歩行距離を考慮した待ち行列の解析

柳澤 大地 [1], 友枝 明保 [1], 木村 紋子 [1], 西成 活裕 [1]

[1] 東京大学　工学系研究科　航空宇宙工学専攻

概要

本研究では、待ち行列の先頭からサービス窓口までの歩行距離を考慮した待ち行列について、待ち行列理論を拡張して理論的な解析を行った。窓口が複数ある場合、通常の待ち行列理論では待ち行列を一つにまとめ、空いた窓口に先頭の人が移動する「フォーク型」の方が、窓口ごとに独立に待ち行列を構成する「並列型」より、いかなる場合も効率がよいという結果が導かれる。しかし歩行距離を考慮すると、非常に混雑している場合や歩行時間に対してサービス時間が短い場合は、「並列型」の方が効率がよいという結果が得られた。またサービス時間が長い人と短い人が同じくらいの人数いるとき、両者を混在させるよりも分けて待ち行列を形成した方がストレスが少ないことも理論的に調べられた。

Analysis on a Queue by introducing the Walking Distances

Daichi Yanagisawa[1], Akiyasu Tomoeda[1], Ayako Kimura[1], Katsuhiro Nishinari [1]

[1] Department of Aeronautics and Astronautics, School of Engineering, The University of Tokyo

Abstract

We introduce the effect of walking distances from the head of the queue to the service windows to the queueing theory. When there are plural service windows, the queueing theory indicates that a Fork-type queue, which collect people into one queue, is more efficient than a Parallel-type queue, which makes queues for each service windows. However, in the distance introduced queueing theory, we find that the Parallel-type queue is more efficient when there are many people and service time is shorter than walking time. We also consider the situation that there are two kinds of people, whose service time is long and short. The analytical result says that setting up queues for each kind of people can decrease their stress.

1　はじめに

世の中に見られる待ち行列は大きく分けると二つのタイプがある。一つはスーパーのレジなどに見られる「並列型」(以下 Parallel)(図 1(左)) であり、もう一つは大きな銀行の ATM などに見られる「フォーク型」(以下 Fork)(図 1(右)) である。現在の待ち行列理論では、待ち行列をそれぞれの窓口ごとに形成する Parallel よりも、一つにまとめて先頭の人が空いている窓口に移動できる Fork の方が窓口が埋まっている確率や待ち時間が小さく効率がよいという結論が導かれている [1]。また待ち行列の式から得られる結果以外に、Fork では早く来た順にサービスが受けられるという FIFO(First in, First Out) の原則が守られる。従って Parallel のように先に並び始めたのに、たまたま並んだ列が遅い列で後から並んだ人に抜かれるということもなく、待っている人達のストレスも溜まりにくい。

このようによいこと尽くめのように見える Fork だが、よく観察してみると欠点がないわけではない。一つは列の先頭の人が窓口が空いたことにすぐに気づかず、余計な時間かかってしまう場合である。また空港などでは狭い範囲に Fork の待ち行列を作らせるためにテープ張っている。これは空いていると

きには客はかなり窓口まで遠回りすることになり、明らかに余計な時間がかかっている。窓口の数が非常に多い場合は先頭の人が窓口まで歩く時間も無視できない。

以上のように日常の観察からは Fork の欠点をいくつか考えることができるが、現在の待ち行列理論ではそれらを再現することはできない。そこで本研究では、フォーク型待ち行列の先頭から窓口までの距離を考え、そこを歩く時間の効果を取り入れることにより待ち行列理論を拡張した。そしてその解析結果から窓口の歩行時間とサービス時間の比や混み具合によって、Parallel と Fork の優劣が変化することを示した。

待ち行列のもう一つの大きな問題として、サービス時間が待っている人によって異なるというものがある。日本の空港の入国審査では外国人は日本人に比べて遥かに時間がかかる。そのため日本人と外国人を分けて、待ち行列を構成している。また日本ではあまり見られないが、海外では購入する商品が少ない人のための”Express”レジがある。本研究では、サービス時間が長い人と短い人を分けることによる平均ストレスの低下についても理論的に見積もることに成功した。

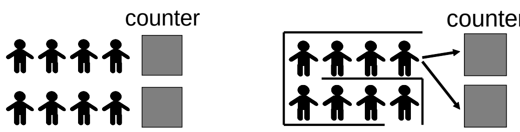

図 1: (左) 並列型の待ち行列 (Parallel) の例. (右) 通常のフォーク型待ち行列 (N-Fork) の例.

2 サービス窓口までの距離の効果

今回は図 2 のように待ち行列は一番端の窓口 1 の前にあり、窓口番号が大きければ大きいほど待ち行列の先頭から離れていくようなシステムを考える。λ, μ はそれぞれ待ち行列理論の平均到着率と平均サービス率であり、距離のモデル化にはセルオートマトンを用いた。待ち行列の先頭から合流部までの距離を d_1 セル、合流部から窓口 1 までの距離を d_2 セル、一般に窓口番号 n までの距離を $d_1+d_2+k(n-1)$ セルと定める。窓口の総数を s とすると、図 2 は $s=3$, $d_1=3$, $d_2=2$, $k=2$ の場合を表している。人の歩く速さに当たる 1 タイムステップに 1 セル移動する確率を p とすると、窓口 n が空いたのを発見して、そこまで移動しサービスを受けて終了するまでの時間 T_n は、平均場近似により全てのセルが空いていると仮定すると、

$$t_n = \frac{d_1+d_2+k(n-1)}{p} + \frac{1}{\mu} \tag{1}$$

となる。この近似では図 2 の灰色部分 A での人の排除体積効果を無視している。自分がサービスを受ける窓口は歩き始めるときに空いている中で一番近いものに決定し、途中でより近くの窓口が空いても変えないことにする。以上の仮定のもとで、n 個の窓口の平均通過時間を計算すると、

$$\begin{aligned} \bar{T_n} &= \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} t_n = \frac{1}{2}\frac{k}{p}(n-1) + \frac{1}{\acute{\mu}} \\ \frac{1}{\acute{\mu}} &= \frac{d_1+d_2}{p} + \frac{1}{\mu} \end{aligned} \tag{2}$$

となる。これを用いて n 個の窓口による平均サービス率 $\hat{\mu}$ を求めると、

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \frac{n}{\bar{T_n}} = \frac{\acute{\mu}n}{1+\frac{1}{2}\frac{k}{p}\acute{\mu}(n-1)} = \frac{\acute{\mu}n}{1+\beta(n-1)} \\ \beta &= \frac{k\acute{\mu}}{2p} \end{aligned} \tag{3}$$

が得られる。これは窓口までの距離を考慮した全ての窓口の平均サービス率である。この式において $n \to \infty$ とすると、$\hat{\mu} \to 2\frac{p}{k}$ となる。つまり窓口の個数をいくら増やしても、窓口までの距離を考慮した場合はサービス率は最高で $2\frac{p}{k}$ までしか上がらず、またそれは窓口のサービス率に依存しないことが分かる。

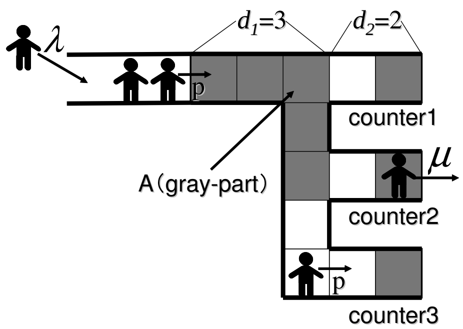

図 2: 距離付きとフォーク型待ち行列 (D-Fork) の例.

3 歩行の距離を考慮したフォーク型待ち行列の状態方程式

以下では既存の待ち行列理論によるフォーク型待ち行列を「N-Fork」、「窓口までの距離を考慮した場合のフォーク型待ち行列」を「D-Fork」と呼ぶことにする。また窓口の数が二つ以上のときに、遠くの窓口に行くのにかかるロスを調べるのが目的であるので、Parallel と Fork 両方に同じ影響を及ぼす d_1, d_2 は共に $d_1 = d_2 = 0$ とする。つまり $\mu = \acute{\mu}$ となる。窓口も含めた待ち行列の系の中に n 人いる確率を P_n とすると、状態方程式は、

$$\lambda P_0 = \hat{\mu}_0 P_1$$
$$\lambda P_{n-1} + (n+1)\hat{\mu}_{n+1} P_{n+1} = (\lambda + n\hat{\mu}_n) P_n \quad (1 \leq n \leq s-1) \tag{4}$$
$$\lambda P_{n-1} + s\hat{\mu}_s P_{n+1} = (\lambda + s\hat{\mu}_s) P_n \quad (n \geq s)$$

となる。このシステムの状態方程式は距離を考慮しないフォーク型待ち行列 (N-Fork) の状態方程式の μ を $\hat{\mu_n}$ に置き換えた形になっている。この状態方程式は厳密に解くことができて、例えば系に人がいない確率 P_0 は、

$$P_0 = \frac{1}{1+A+B}$$
$$A = \sum_{n=1}^{s-1} \left[(\rho s)^n \prod_{l=1}^{n} \left\{ \frac{1+\beta(l-1)}{l} \right\} \right] \tag{5}$$
$$B = \frac{\prod_{l=1}^{s} \left[\rho s \frac{1+\beta(l-1)}{l} \right]}{1-\rho\left[1+\beta(s-1)\right]}$$

と求まる。ただし、$\rho = \lambda/(s\mu)$ であり、これは混み具合を表す。このように理論的な解析によって、他にも窓口が全て埋まっている確率や、待ち行列の長さ、窓口を含めた待ち行列の系にいる総人数、待ち時間などを計算することができる。

4 Parallel と D-Fork の逆転

ここでは並列型の待ち行列 (Parallel)、通常のフォーク型待ち行列 (N-Fork)、距離付きフォーク型待ち行列 (D-Fork) の三つを比較する。比較する指標として今回は、窓口が全て埋まっている確率 $P_{n \geq s}$ を用いる。$P_{n \geq s}$ は、客がサービスを受けようと思い待ち行列の系の中に入ったとき、全て窓口が埋まっていて行列に並んで待たなくてはならない確率である。したがって $P_{n \geq s}$ は値が小さい方が好ましいものである。

図 3 は Parallel, N-Fork, D-Fork の $P_{n \geq s}$ を描いたものである。これより、N-Fork は Parallel や D-Fork よりも全ての窓口が埋まっている確率が小さい、つまりいずれかの窓口が空いている確率が大きいことが分かる。この結果はそれぞれ既存の待ち行列理論と歩行距離を考慮していることから説明できる。興味深いのは、Parallel と D-Fork を比較した場合である。図 3 では青の破線と赤の太線の交点が見られ、混み具合 ρ が小さいときは D-Fork の方が効率がよく、ρ が大きいときは Parallel の方が効率がよいことが分かる。Parallel の効率が Fork に比べて悪くなるのは、あまり混んでいないとき一つの列に二、三人の客が集まり、空いている窓口が生じるという現象によるものなので、混んでいるときに Parallel の効率の方がよくなるのは、直感と一致している。

図 3 では歩行時間と窓口のサービス時間の比である β を固定しているので、β によって $P_{n \geq s}$ がどのように変化するのかということも調べる必要がある。また実際の待ち行列設計において、サービス時間や歩行時間、混み具合などが分かったときに、どのような待ち行列形態が最適なのかを知ることができれば非常に役立つ。そこで窓口が四つの場合、ρ と β に対して $P_{n \geq s}$ を最小にする待ち行列形態を図 4 に示す。図 4 を見ると、ρ や β が小さい領域では四つの窓口を全てまとめて D-Fork とした方がよく、大きい領域であれば窓口を全て独立にして Parallel とした方がよく、間の領域では窓口を二つずつまとめて、二つの D-Fork を形成するのが最適だと分かる。

$$\beta = \frac{k\acute{\mu}}{2p} = \frac{\frac{k}{2p}}{\frac{1}{\acute{\mu}}} \tag{6}$$

より、β は窓口間隔の半分を歩くのにかかる時間とサービス時間の比を表す。つまり歩行時間に対して、窓口でのサービス時間が十分に大きければ、距離を考慮した場合でも D-Fork の方が効率がよいということである。街中にある ATM はこの条件を満たしているので、Fork にしていることがデメリットとなっていることはないだろう。しかし窓口の間隔がどうしても広くなってしまうシステム、例えば国際空港の入国審査などはこの条件を満たしているとは言いにくい。そこで一つの Fork にまとめてしまうのでなく、二つの Fork の待ち行列を作るなどの対策が必要だと考えられる。

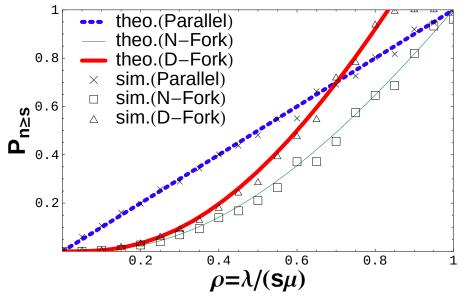

図 3: 窓口が全て埋まっている確率 $P_{n\geq s}$ $(s=3,\ \beta=0.1)$

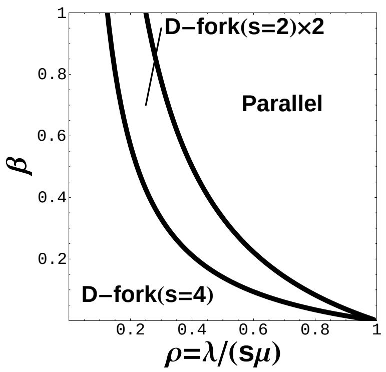

図 4: $s=4$ のときの $P_{n\geq s}$ を最小にする待ち行列形態

5 サービス時間に差がある場合の最適な待ち行列形態

この節では、サービス時間が長い人 $(\mu=0.9)$ と短い人 $(\mu=0.1)$ がいる場合、待ち行列を分けた方 (以下 Divide) がよいのか一緒の方 (以下 Mix) がよいのかについて検討する。単純な平均待ち時間などを比較すると、Parallel と Fork の比較と同じように Mix の方が無駄に空いている窓口が生じない分効率がよい。しかしサービス時間が短い人にとって、サービス時間が長い人が原因で待たされるというのは非常にストレスが溜まるはずである。そこでこの影響を考慮するために、待ち時間をサービス時間で割った比 (以下 S_q) で比較する。S_q は待っている人達の平均ストレスを表す指標と考えられる。図 4 は、窓口が四つのときの待っている人の平均ストレス S_q のグラフである。Divide では、三つの窓口を待ち時間が長い人専用とし、残りの一つの窓口を待ち時間が短い人専用とした。Mix では、四つの窓口全てを共用とした。グラフの横軸 ν は待ち時間が短い人の割合である。ν が小さいときは待ち時間が長い人が多く、大きいときは短い人が多い。図 4 を見ると、ν が小さいときや大きいときは Mix の方が平均ストレスが小さいが、$\nu\sim0.35$ では Divide の方が平均ストレスが小さい。これはほとんど一種類の人しかいない場合は、四つ全ての窓口を無駄なく使える Mix の方がストレスが少ないが、サービス時間が長い人と短い人が混在している場合は、短い人が長い人のせいで待たされストレスが大きくなるのを防ぐために、窓口を分けた方がよいということである。

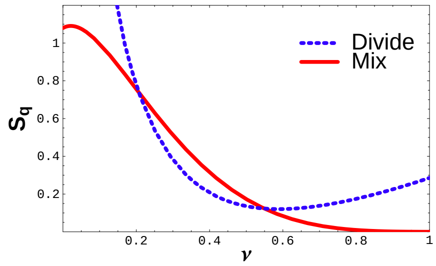

図 5: 待ち時間が短い人の割合 ν に対する待っている人の平均ストレス S_q $(s=4,\ \lambda=0.2,\ \beta=0.2)$.

6 まとめと今後の課題

本研究では、待ち行列理論に歩行距離の効果を導入し、混み具合 ρ と歩行時間とサービス時間の比 β によって最適な待ち行列形態が変化することを理論的に示した。またサービス時間の異なる二種類の人を考え、両者が同じくらいの人数いる場合は待ち行列を分けた方が平均ストレスが小さくなることも理論的に示すことができた。

今回の理論解は全てのセルが空いているという平均場近似を用いたため、人の排除体積効果を一切無視している。シミュレーションにより、その妥当性の確認することが第一の課題となる。理論とシミュレーションの整合性が確認されたのちは実験を行いモデルが現実的であるかを検証する。それが確認できれば、この研究成果は人の待ち行列を最適に設計することができる理論として、工学的に大いに利用することが可能となるだろう。

参考文献

[1] 西成活裕: “ クルマの渋滞アリの行列〜渋滞学が教える「混雑」の真相〜 ”, 技術評論社, 2007.