交通ネットワーク均衡の成立条件についての一考察

中山晶一朗[1]

[1] 金沢大学大学院 自然科学研究科 社会基盤工学専攻

概要

本研究では，個々の道路利用者は，日々変動する交通状況下にて，ベイズ学習に基づいた経路選択を行うと仮定し，交通ネットワークフローのday-to-dayダイナミクスモデルを構築する．本モデルにより，ベイズ学習による経路選択では最小旅行時間となった回数が最も多い経路を日々選択するという単純なものとなることを示す．そして，そのモデルの均衡点がワードロップ均衡であること，さらに，個々の道路利用者の初期のばらつきが十分に大きい場合，ワードロップ均衡は大域的漸近安定で，十分に時間が経過するとその均衡に収束することを示す．

On the Formation Conditions of Transportation Network Equilibrium

Shoichiro Nakayama[1]

[1] Department of Civil Engineering, Graduate School of Natural Science & Technology, Kanazawa University

Abstract

In this study, we assume that each driver under day-to-day dynamic transportation circumstances chooses a route based on Bayesian learning, and develop a day-to-day dynamical model of network flow. It is found in this model that the driver with Bayesian learning chooses the route which has the minimum travel time the most frequently. Furthermore, we find that an equilibrium point of the day-to-day dynamical model is identical to the Wardrop's equilibrium, and the Wardrop's equilibrium is globally asymptotically stable if initial recognition among drivers is dispersed widely, and the day-to-day dynamical system always converges to the Wordrop's equilibrium.

1. はじめに

交通ネットワークの分析に対して，その均衡モデルの果たす役割は大きいと言えよう．近年，交通ネットワーク均衡モデルの動的化に関して，多くの研究がなされてい[1]る．しかし，研究が比較的進展している均衡モデルの動的化は，一日の交通状態を時間帯別に記述するダイナミクスや時々刻々の渋滞伸延等の記述を目指すより詳細なダイナミクスのtime-to-timeに関するものが中心であり，ダイナミクスのうち日々の変化に注目するday-to-dayに関するダイナミクスについては，以下で述べるような研究があるものの，基本的な問題が未だ十分には解明されていない部分も多く，研究の進展が望まれている．

交通ネットワークにおける day-to-day ダイナミクスは，交通ネットワーク均衡の安定性やその成立条件がいかなるものかという問題に直結する．ワードロップ均衡[2]は広く用いられているが，以下で詳述するように，その成立条件や形成過程など基本的な性質は必ずしも十分に明らかにはされていない部分がある．実務的にも近年「均衡配分」としてワードロップ均衡が多用されているが，それを適切に適用するためにも，このような成立条件や形成過程を明らかにすることは極めて重要と思われる．また，交通ネットワークのday-to-day ダイナミクスに関する研究は，交通ネットワーク制御・管理を考える上でも非常に重要である．

本研究では，交通ネットワーク上を走行する道路利用者の経路選択行動及びその学習のモデル化を行う．そして，道路利用者の経路選択行動及びその学習モデルを用いてネットワークフローの day-to-day ダイナミクスの定式化を行う．これらを用いて，交通ネットワーク均衡の安定性やその成立条件等を考察することが本研究の目的である．

2. ベイズ学習

2.1 道路利用者に関する仮定

本研究では，確定的なフローダイナミクスを扱うが，道路利用者は事前には各経路・リンクの旅行時

間を知ることはできないとする．したがって，各道路利用者は日々変化する経路旅行時間は確率的に変動しているものとして認識すると仮定し，各経路が最小旅行時間となる確率をベイズ学習により学習するものとする．しかし，これまでの走行経験や交通状況を基に経路選択自体は確定的に行う．よって，フローダイナミクスは確定的となる．

道路利用者は合理的であり，出来るだけ旅行時間の短い経路を選択しようとすると仮定する．そして，道路利用者は旅行時間が最小となる（主観的）確率が最も大きい経路を選択すると仮定する．

本稿では，同一の OD ペア間でトリップを行う道路利用者は全員同じ経路選択肢集合を持ち，それぞれが毎日その OD ペア間のトリップを行うと仮定する．また，道路利用者は，全員，同じ最小旅行時間経路情報（上述のどの経路が最小旅行時間であったのかという情報もしくはそれを正しく認識できるための情報）を持ち，次節で詳述するベイズの定理に従う方法により，経路が最小旅行時間となる主観的確率を日々学習すると仮定する．このように同一 OD ペア間では道路利用者は同質であると仮定する．

OD ペア $i\,(\in I)$ の(OD)交通量（道路利用者数）は固定値であり，それを q_i とする．ここで，I は OD ペアの集合である．OD ペア i の経路 $j\ (\in J_i)$ が最小旅行時間経路となる（主観的）確率を π°_{ij} とする．だたし，OD ペア i の経路集合は J_i であり，$|J_i|$ は集合 J_i に含まれる要素数（OD ペア i の経路数）である．また，リンク $a\,(\in A)$ の旅行時間関数を $c_a(\cdot)$ とする．ここで，A はリンク集合である．本研究では，リンク旅行時間関数は狭義単調増加であると仮定する．

2.2 学習モデル

第 n 日目に OD ペア i の各経路が最小旅行時間となる主観的確率が $\boldsymbol{\pi}^{\circ}_{in}=(\pi^{\circ}_{i1n},\pi^{\circ}_{i2n},\ldots,\pi^{\circ}_{i|J_i|n})^T$ である場合，その日に経路 j が最小旅行時間経路となる確率はベルヌイ分布に従う．だたし，^{T}は行列もしくはベクトルの転置である．ここで，ベルヌイ分布とは，二項分布の特殊形であり，その確率関数は $\pi^{\circ\ d_{ijn}}_{ijn}(1-\pi^{\circ}_{ijn})^{1-d_{ijn}}$ である．なお，d_{ijn} は OD ペア i の経路 j が n 日目に最小旅行時間となる場合は 1 となり，最小旅行時間とならない場合は 0 となる変数である．

経路が最小旅行時間となるかどうかに関して，$\boldsymbol{\pi}^{\circ}_{in}$ が与えられると，$\mathbf{d}_{in}=(d_{i1n},d_{i2n},\ldots,d_{i|J_i|n})^T$ は，$\sum_{j\in J_i} d_{ijn}=1$ とすると，以下のカテゴリカル分布に従うことになる．

$$g\left(\mathbf{d}_{in}\middle|\boldsymbol{\pi}^{\circ}_{in}\right)=\prod_{j\in J_i}\pi^{\circ\ d_{ijn}}_{ij} \tag{1}$$

前節で述べたように，道路利用者は，ベイズの定理に基づき，経路の最小旅行時間確率を日々更新する．道路利用者の学習の中では，経路が最小旅行時間となる確率自体が確率変数とする．OD ペア i の k 番目の道路利用者の主観的な経路の最小旅行時間確率に対する確率変数を $\boldsymbol{\Pi}^{\circ}_{ikn}=(\Pi^{\circ}_{i1kn},\Pi^{\circ}_{i2kn},\ldots)^T$ とし，その実現値を $\boldsymbol{\pi}^{\circ}_{ikn}=(\pi^{\circ}_{i1kn},\pi^{\circ}_{i2kn},\ldots)^T$ と表記することとする．

本研究では，道路利用者はトリップ終了後，その日の最小旅行時間となった経路を知り，それに基づき，経路の最小旅行時間となる確率を以下のベイズ学習の式に従って更新する（学習する）．

$$f\left(\boldsymbol{\pi}^{\circ}_{in+1}\middle|\mathbf{d}_{in}\right)=\frac{g\left(\mathbf{d}_{in}\middle|\boldsymbol{\pi}^{\circ}_{in}\right)f\left(\boldsymbol{\pi}^{\circ}_{in}\right)}{\int_{\Xi_{in}} g\left(\mathbf{d}_{in}\middle|\boldsymbol{\pi}^{\circ}_{in}\right)f\left(\boldsymbol{\pi}^{\circ}_{in}\right)d\boldsymbol{\pi}^{\circ}_{in}}\propto g\left(\mathbf{d}_{in}\middle|\boldsymbol{\pi}^{\circ}_{in}\right)f\left(\boldsymbol{\pi}^{\circ}_{in}\right) \tag{2}$$

ここで，$f(\boldsymbol{\pi}^{\circ}_{in})$ は $\boldsymbol{\pi}^{\circ}_{in}$ の確率密度関数，Ξ_{in} は $\mathbf{d}_{in}$ の集合である．なお，添え字 k は省略している．以降も，添え字 k は特に必要な場合を除き，省略する．

多項分布の共役な分布はディリクレ分布（多変量ベータ分布）であるため[3]，最小旅行時間確率の確率変数 $\boldsymbol{\Pi}^{\circ}_{in}$ はディリクレ分布に従うと仮定する．OD ペア i の経路の主観的な最小旅行時間確率（道路利用者が考える経路が最小旅行時間となる確率）が従うディリクレ分布 $\mathrm{Dr}[\boldsymbol{\alpha}_{in}]$ の確率密度関数は以下の通りである．

$$f_{in}\left(\boldsymbol{\pi}^{\circ}_{in}\right)=\frac{\Gamma\left(\sum_{j\in J_i}\alpha_{ijn}\right)}{\prod_{j\in J_i}\Gamma(\alpha_{ijn})}\prod_{j\in J_i}\pi^{\circ\ \alpha_{ijn}-1}_{ijn} \tag{3}$$

ただし，$\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数，$\boldsymbol{\alpha}_{in}=(\alpha_{i1n},\alpha_{i2n},\ldots)^T$ はディリクレ分布のパラメータである．式 (3) のディリクレ分布では，$\boldsymbol{\Pi}^{\circ}_{in}$ の成分である Π°_{ijn}の平均は α_{ijn}/α_{in} ($\forall j\in J_i$) である．ただし，$\alpha_{in}\equiv\sum_{j\in J_i}\alpha_{ijn}$ である．また，Π°_{ijn}の分散は $\alpha_{ijn}(\alpha_{in}-\alpha_{ijn})/[\alpha_{in}^2(\alpha_{in}+1)]$ である．

ここで，n 日目の学習について考えよう．この日の主観的な経路の最小旅行時間確率の事前確率は $\mathrm{Dr}[\boldsymbol{\alpha}_{in}]$ に従う．そして，トリップ終了後，$\mathbf{d}_{in}$ が判明し，$\mathbf{d}_{in}$ を用いて，主観的な経路の最小旅行時間確率の事後確率を求めることがその日の学習となる．式 (1) 及び (3) を式 (2) に代入すると，n 日目の学習後の事後確率の確率密度関数は

$$f\left(\boldsymbol{\pi}^{\circ}_{in+1}\middle|\mathbf{d}_{in}\right)=\frac{\Gamma\left(\sum_j\left(\alpha_{ijn}+d_{ijn}\right)\right)}{\prod_{j\in J_i}\Gamma(\alpha_{ijn}+d_{ijn})}\prod_{j\in J_i}\pi^{\circ\ \alpha_{ijn}+d_{ijn}-1}_{ijn} \tag{4}$$

となる．この事後確率も事前確率と同様にディリクレ分布であり，事前のディリクレ分布のパラメータ $\boldsymbol{\alpha}_{in}$ が $\boldsymbol{\alpha}_{in+1}+\mathbf{d}_{in}$ に置き換わっただけである．つまり n 日目のトリップの終了後，道路利用者の主観的な経路の最小旅行時間確率 $\boldsymbol{\Pi}^{\circ}_{in}$ は $\mathrm{Dr}[\boldsymbol{\alpha}_{in}+\mathbf{d}_{in}]$ に従う．したがって，最小旅行時間確率の学習は

$$\boldsymbol{\alpha}_{in+1}=\boldsymbol{\alpha}_{in}+\mathbf{d}_{in} \tag{5}$$

とディリクレ分布のパラメータが更新されることであると考えることができる．最小旅行時間となる経

路が一つのみの場合，$\boldsymbol{\alpha}_{in}$ と $\boldsymbol{\alpha}_{in+1}$ の関係は以下の通りとなる．

$$\alpha_{ijn+1} = \begin{cases} \alpha_{ijn} + 1 & if\ j = \arg\min_{j \in J_i} t_{ijn} \\ \alpha_{ijn} & otherwise \end{cases} \quad (6)$$

ここで，t_{ijn} は n 日目の OD ペア i の経路 j の（経路の実現した）旅行時間，arg は最小旅行時間となる経路をとるオペレータである．

第 1 日目に経路選択や学習を行うために，各道路利用者は，第 1 日目での事前の経路の最小旅行時間確率 $\boldsymbol{\alpha}_{i1}$ が必要であり，本研究では，それを初期値として与える．この $\boldsymbol{\alpha}_{i1}$，そして，$\mathbf{d}_{il}\,(l=1,\ldots,n-1)$ が与えられると，n 日目の事前の経路の最小旅行時間確率は $\mathrm{Dr}[\boldsymbol{\alpha}_{i1} + \mathbf{s}_{in}]$ に従うと表記できる．ここで，$\mathbf{s}_{in} = \sum_{l=1}^{n-1} \mathbf{d}_{il}$ である．$\mathbf{s}_{in}$ は n 日の前日（$n-1$ 日）までの各経路の最小旅行時間となった回数を表すベクトルである．

初期パラメータ $\boldsymbol{\alpha}_{i1}$ が有限であり，全く選択されることがない経路が経路集合に含まれていないならば，明らかに次式が成立する．

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\alpha}_{in} = \lim_{n\to\infty}\left(\boldsymbol{\alpha}_{i1} + \sum_{l=1}^{n-1} \mathbf{d}_{il} \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{l=1}^{n-1} \mathbf{d}_{il} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{s}_{in} \quad (7)$$

3. 経路選択とダイナミクス

3.1 経路選択

最小旅行時間となる確率が（平均的に）最も高い経路 $\arg\max_{j \in J_i} \alpha_{ijn}$ が選択されるとする．

最小旅行時間となる確率の初期値（$\boldsymbol{\alpha}_{i1}$）は道路利用者間でばらついているとする．そして，その初期値 α_{ijkn} はガンベル分布に従って与えられるものと仮定する．この与えるガンベル乱数のばらつきの大きさはパラメータ θ によって規定されるとする．各道路利用者の初期値 α_{ijkn} を与えるガンベル乱数の分布の累積分布関数 $F(x)$ は $\exp\{-\exp[-\theta x]\}$ であり，平均は γ/θ，分散は $\pi^2/6\theta^2$ である（γ はオイラー数）．

以上のように捉えると，各道路利用者に与えられた初期値は確定的であるものの，このように道路利用者数が大きい場合は，OD ペア i の代表的道路利用者が $\arg\max_{j \in J_i} s_{ijn} + \varepsilon_{ijn}/\theta$ の経路を選択する確率として，経路 j を選択する比率 p_{ijn} を求めることができ，その比率に OD 交通量を乗じると経路交通量とすることができる．ただし，ε_{ijn} はガンベル分布 G[0, 1]（パラメータが 0 及び 1 のガンベル分布）に従う確率変数であり，ε_{ijn}/θ の累積分布関数 $F(x)$ は $\exp\{-\exp[-\theta x]\}$ となる．この時，$\arg\max_{j \in J_i} s_{ijn} + \varepsilon_{ijn}/\theta$ は確率的となり，経路選択確率が算出されるが，各道路利用者に与えられた初期値自体は確定値であるため，この経路選択確率を経路選択「比率」とし，その比率に OD 交通量を乗じた確定的な経路交通量を扱う．経路選択比率は，$\Pr\left[s_{ijn} + \varepsilon_{ijn}/\theta > s_{i\,j'n} + \varepsilon_{ij'n}/\theta \mid j' \in J_i^{-j}\right]$ となる．ここで，J_i^{-j} は OD ペア i の経路集合のうち，経路 j 以外のものである．よって，p_{ijn} は次の多項ロジットモデル式として与えられる．

$$p_{ijn} = \frac{e^{\theta s_{ijn}}}{\sum_{j' \in J_i} e^{\theta s_{ij'n}}} \quad (8)$$

3.2 経路選択のダイナミクス

経路選択は，どの経路が最小旅行時間となる（主観的）確率が高いのかに基づいている．そして，式 (8) が示すように，経路選択のダイナミクスは $\mathbf{s}_{in}$ により規定される．このダイナミクスは $\mathbf{s}_{n+1} = \mathbf{s}_n + \mathbf{d}_n$ である．ここで，$\mathbf{s}_n = (\mathbf{s}_{1n}, \ldots, \mathbf{s}_{|I|n})^T$，$\mathbf{d}_n = (\mathbf{d}_{1n}, \ldots, \mathbf{d}_{|I|n})^T$ である．また，$\mathbf{p}_n = (\mathbf{p}_{1n}, \ldots, \mathbf{p}_{|I|n})^T$，$\mathbf{p}_{in} = (p_{i1n}, \ldots, p_{i|J_i|n})^T$ であるとする．n 日目の全トリップが終了し，その日の最小旅行時間経路 $\mathbf{d}_n$ が判明した後では，$n+1$ 日目の経路選択比率 p_{ijn+1} は，以下のように与えられる．

$$p_{ijn+1} = \frac{e^{\theta (s_{ijn} + d_{ijn})}}{\sum_{j' \in J_i} e^{\theta (s_{ij'n} + d_{ij'n})}} \quad (9)$$

上式を整理すると，n が与えられれば，s_{ijn} は次式のように与えられる．

$$s_{ijn} = \frac{1}{\theta} \ln p_{ijn} + \frac{1}{|J_i|}\left(n - 1 - \frac{1}{\theta} \sum_{j' \in J_i} \ln p_{ij'n} \right) \quad (10)$$

上式を式 (9) に代入し，整理すると，$\mathbf{p}_{n+1}$ の成分 p_{ijn+1} は $\mathbf{d}_n$ の成分を用いて，以下のように表される．

$$p_{ijn+1} = \frac{p_{ijn} e^{\theta d_{ijn}}}{\sum_{j' \in J_i} p_{ij'n} e^{\theta d_{ij'n}}} \quad (11)$$

実際の旅行時間は確定的に変化するため，最小旅行時間となる経路が 2 つ以上になり得る．第 n 日に最小旅行時間となっている OD ペア i の経路の集合を $\tilde{J}_{in}$ と表記することにする．そして，その集合に含まれる経路数（最小旅行時間となっている経路数）を $|\tilde{J}_{in}|$ とする．これまで用いてきた d_{ijn} を以下のように拡張する．

$$d_{ijn} = \begin{cases} \dfrac{1}{|\tilde{J}_{in}|} & if\ j \in \tilde{J}_{in} \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad (12)$$

上式は，明らかにこれまで考えてきた最小旅行時間経路が一つの場合を含むものである．式 (12) のように，d_{ijn} を定義すると，最小旅行時間経路が複数の場合でも，式 (11) として，経路選択確率のダイナミクスを定式化することが出来る．

4. 均衡の安定性

前章で，道路利用者が経路の最小旅行時間となる確率をベイズ学習するとし，その場合の経路選択比率の day-to-day ダイナミクスの定式化を行った．本章では，前章で述べた day-to-day ダイナミクスに従って経路選択比率が推移する場合に，そのシステムがワードロップ均衡に収束するための条件やその形成過程などを理論的・定性的に考えるために，均衡の安定性について検討する．

OD ペア i 交通需要(OD 交通量)は既に述べたように固定値 q_i である．また，p_{ijn} は経路選択比率であり，OD ペア i の経路 j の経路交通量は確定値 $q_i\, p_{ij}$ となる．

ワードロップ均衡の最適化問題の目的関数を用いて，前章で述べたダイナミクスのリアプノフ関数を次式のように仮定する．

$$\widetilde{H}(\mathbf{x}) = \sum_{a\in A}\int_0^{x_a} c_a(w)dw - \sum_{a\in A}\int_0^{x_a^*} c_a(w)dw \qquad (13)$$

ここで，x_a はリンク a の交通量（$a\in A$），x_a^* はワードロップ均衡でのリンク a の交通量，$\mathbf{x} = (x_1, x_2,\ldots, x_{|A|})^T$，$|A|$ はリンク総数（集合 A の要素数）である．また，2 章で述べたように，$c_a(\cdot)$ はリンク a の旅行時間関数であり，それは狭義単調増加関数とする．

$\mathbf{p}$ が与えられれば，$\mathbf{x}$ は一意に決まり，$\mathbf{x}$ は $\mathbf{p}$ の関数である．よって，$\widetilde{H}$ は $\mathbf{p}$ の関数でもあるため，以下では，式 (13) と実質的に同じ関数 $H(\mathbf{p}) = \widetilde{H}(\mathbf{x}(\mathbf{p}))$ について考えることにする．関数 $H(\mathbf{p})$ は，$\widetilde{H}$ の性質から，明らかに，定義域において，常に非負であり，ワードロップ均衡の時のみ 0 となる．

θ が十分に小さい場合，式 (11) より，$|\mathbf{p}_{n+1} - \mathbf{p}_n|$ も十分に小さくなることが分かる．このように $|\mathbf{p}_{n+1} - \mathbf{p}_n|$ が十分に小さい場合，一次のテイラー展開により，$H(\mathbf{p}_{n+1}) - H(\mathbf{p}_n)$ は $\nabla_{\mathbf{p}} H(\mathbf{p}_n)^T(\mathbf{p}_{n+1} - \mathbf{p}_n)$ と近似することが出来る．ここで，$\partial H/\partial y_{ijn} = t_{ijn}$ であり [1]，また，$dy_{ijn}/dp_{ijn} = q_i$ であるため，$\partial H/\partial p_{ijn} = q_i\, t_{ijn}$ となる．ただし，y_{ijn} は第 n 日目の OD ペア i の経路 j の（経路）交通量で $q_i\, p_{ij}$ であり，t_{ijn} はその経路旅行時間である．よって，$H(\mathbf{p}_{n+1}) - H(\mathbf{p}_n)$ は $\sum_{i\in I} q_j \sum_{j\in J_i} t_{ijn}(p_{ijn+1} - p_{ijn})$ となる．さらに，$H(\mathbf{p}_{n+1}) - H(\mathbf{p}_n)$ は次式のように整理することが出来る（詳細は省略）．

$$H(\mathbf{p}_{n+1}) - H(\mathbf{p}_n) = \sum_{i\in I} q_i (1-\kappa_{in})\,\hat{p}_{in}(\tau_{in} - \hat{t}_{in}) \qquad (14)$$

ここで，$\hat{p}_{in} = \sum_{j\notin \tilde{J}_i} p_{ijn}$，$\hat{t}_{in} = \sum_{j\notin \tilde{J}_i} t_{ijn}\, p_{ijn}/\hat{p}_{in}$，$\kappa_{in} = 1/[\hat{p}_{in} + e^{\theta d_{in}}(1-\hat{p}_{in})]$，$\tau_{in}$ は n 日目の OD ペア i の最小旅行時間，$d_{in} = 1/|\widetilde{J}_{in}|$ である．なお，既に述べたように，$\widetilde{J}_{in}$ は n 日目に OD ペア i で最小旅行時間となった経路の集合であり，$j\notin \widetilde{J}_{in}$ は集合 J_i のうち最小旅行時間とならなかった経路の集合である．$\hat{p}_{in}$ は最小旅行時間ではない経路を選択する比率であり，$\hat{t}_{in}$ は最小旅行時間ではない経路の旅行時間の（選択比率に関する重み付き）平均である．よって，明らかに $\tau_{in} - \hat{t}_{in} < 0$ である．また，$1-\kappa_i > 0$ であるため，式 (14) より $H(\mathbf{p}_{n+1}) - H(\mathbf{p}_n) < 0$ となる．

以上より，θ が十分に小さい場合，H はリヤプノフ関数であり，ワードロップ均衡解 $\mathbf{p}^*$ は大域的漸近安定である．したがって，どのような初期状態から始まってもいずれはワードロップ均衡に収束・安定する．

θ が大きく，初期値のばらつきが小さい場合について，ここで簡単に触れておこう．本研究では，日々獲得する情報は同じ OD 間をトリップする道路利用者の間では同じである．異なるのは初期値のみとなる．よって，もし初期値も同じもしくは同程度ならば，毎日全員もしくは多くの道路利用者が毎日他の道路利用者と同じ経路を選択することになり，ワードロップ均衡に収束することができなくなってしまうことになる．

ワードロップ均衡は広く用いられているにもかかわらず，行動論的な背景を含めた成立条件については，これまで必ずしも十分に解明されてこなかったように思われる．しかし，上で述べたワードロップ均衡の安定性についての考察により，初期の認知にばらつきがあり（つまり，θ が十分に小さく），道路利用者は合理的で，情報が十分で最小旅行時間となる経路が分かると，最小旅行時間の頻度が大きい経路を選択する，つまり，2 章及び 3 章で述べたベイズ学習を行うと，時間の経過とともに，ワードロップ均衡に収束することが分かる．なお，道路利用者の情報が限定的で，走行した経路の旅行時間のみなどの場合は，ワードロップ均衡に収束しない場合があることが分かっている．

連絡先

郵便番号 920-1192 金沢市角間町　金沢大学大学院自然科学研究科社会基盤工学専攻
TEL: +81-(0)76-234-4614
FAX: +81-(0)76-234-4644
E-MAIL: snakayama@t.kanazawa-u.ac.jp

参考文献

[1] 例えば，土木学会土木計画学委員会交通ネットワーク出版小委員会：交通ネットワークの均衡分析―最新の理論と解法，丸善，東京，1998.
[2] Wardrop, J.G.: Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research, *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, Part II, Vol. 1, pp.325-378, 1952.
[3] 例えば，O'Hagan, A. and Forster, J.: *Kendall's Advanced Theory of Statistics, Vol. 2B: Bayesian Inference*, 2nd ed., Oxford University Press, New York, 2004.