

modified-Payne モデルの線型安定性解析と非線形飽和現象

友枝 明保[†], 社本 大輔[†], 西成 活裕[†]

[†] 東京大学大学院 工学系研究科 航空宇宙工学専攻

概要

一次元交通流を表現している流体モデルは数多く存在し, 中でも Payne モデルは一様流不安定性を示すモデルとして良いモデルである. ところが, Payne モデルは, 渋滞相である高密度部で不安定性を持ち, 擾乱に対して数値計算が発散するという問題点も抱えている. そこで本講演では, Greenshield の観測結果である速度密度関係式を改良した modified-Payne モデルを提案し, その線型安定性解析と数値計算を行い高密度での安定性について議論する.

Linear Stability Analysis and Nonlinear Saturation on Modified-Payne Model

Akiyasu Tomoeda[†], Daisuke Shamoto[†], Katsuhiko Nishinari[†]

[†] Department of Aeronautics and Astronautics, School of Engineering, University of Tokyo

Abstract

The mechanics of one-dimensional traffic flow has been expressed by many fluid models. Payne model is one of the best models which show instability in homogeneous flow. However, Payne model has some problems : instability at high density and numerical divergence for disturbance. This study proposes modified-Payne model, which is extension of *so-called observation of Greenshield*. We conducted the linear stability analysis and performed numerical calculations of this model.

1 Introduction

近年, 一次元交通流を表現するモデルとして, 最適速度 (Optimal Velocity) モデル [1] やセルオートマトンモデル [2] が主流となっているが, その一方, 流体モデルを用いたマクロなモデルによるアプローチも, 1950 年代から盛んに研究され, 現在に至るまで数多くのモデルが提案されている [3, 4, 5, 6]. 中でも, Payne モデルは交通流の本質である一様流不安定性を再現している非常に強力なモデルである. Payne モデルは "Dynamical wave" の理論に基づいて構築されたモデルであり, 車の台数の保存則 (質量保存則) と車粒子の運動を記述した速度に関する微分方程式による連立微分方程式系で右のように記述される.

-Payne model-

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V) = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{\tau} (V_{opt}(\rho) - V) - \frac{a^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \end{cases} \quad (1)$$

where $a^2 = -\frac{1}{2\tau} \frac{\partial V_{opt}}{\partial \rho} > 0$

ここで, $\rho(x, t), V(x, t)$ はそれぞれ場所 x , 時刻 t における粒子の密度と速度を表しており, τ はドライバーの反応遅れ時間を表している. また, $V_{opt}(\rho)$ は最適速度関数と呼ばれ, Greenshield の観測結果 [7] より, 自由走行時の最高速度を V_0 として,

$$V_{opt}(\rho) = V_0 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}\right) \quad (2)$$

与えられ, ρ_{max} は完全に渋滞してしまったときの密度を表している.

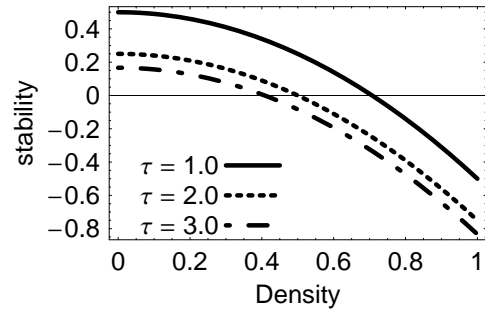
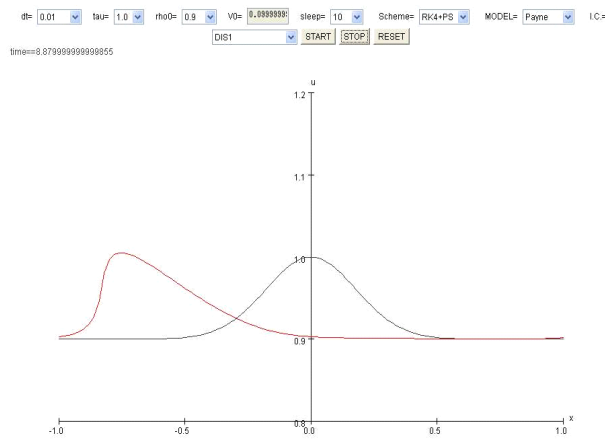


図 2: Greenshield の関係式を用いた Payne モデルの安定性プロット.

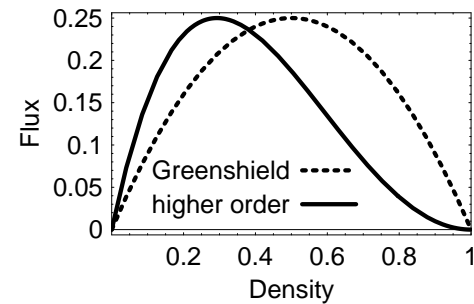
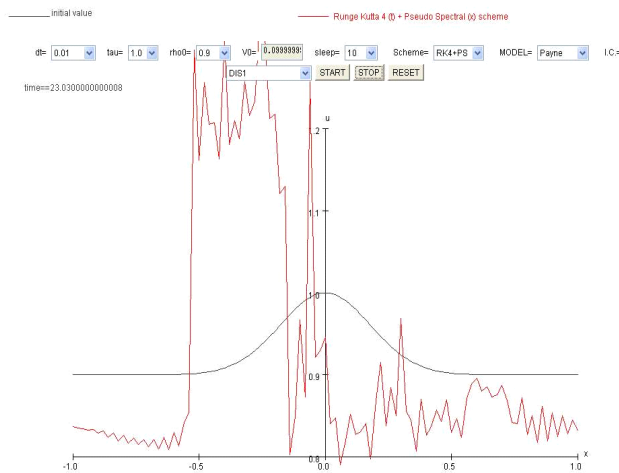


図 3: Greenshield の関係式 (式 (2)) と高次の速度密度関係式 (式 (3)) を用いた場合のそれぞれの基本図.

図 1: Greenshield の観測結果を用いた Payne モデルの時間発展の様子 ($\rho_0 = 0.9, \Delta t = 0.01, \tau = 1.0$). 縦軸が密度であり、横軸が空間を示す. 時間発展の初期状態が上図であり、下図は発散し始めた時間でのプロット.

この Greenshield の関係式を用いた Payne モデルの数値計算¹ が図 1 である. この図を見ると、時間が経つにつれ、擾乱の波が突っ立ち、数値計算が発散してしまっていることがわかる. 交通流の大事な特徴は「一様流不安定性」に加えて、高密度における「渋滞相の存在」である. 実際の車の渋滞現象において伝わる渋滞波は安定な衝撃波として後方に伝播していき、時間発展とともに減衰するものであり、図 1 の数値計算からわかるように従来の Payne モデルは不完全であると言える.

¹本研究の数値計算では、空間に擬スペクトル法、時間発展に 4 次ルンゲクッタ法 (4 段 Jameson Baker 法) を用いており、各プロットは Java Applet のキャプチャー画像である.

これは、線型安定性解析でもわかり、図 2 で見られるように高密度になるに連れて不安定性が強くなっていき、「安定な渋滞波」が形成されない.

そこで、本研究では、従来の Greenshield 関係式を改良した modified Payne (m-Payne) モデルを用いて、安定性解析と数値計算を行うことで、高密度での安定な渋滞波について議論する.

2 modified Payne model

図 3 における破線は、Payne モデルにおける最適速度関数である Greenshield の観測結果 (式 (2)) を用いた場合の基本図²である. 流量と速度の関係は $Q = \rho v$ であるから、Greenshield の関係式を用いた場合の基本図は上に凸な放物線となることがわかる. 一方、図 4 は首都高速道路の実測基本図である. この二つの基本図を見比べるとわかるように、Greenshield の観測結果を用いた場合の基本図は上に凸であるが、首都高速道路の実測基本図では低い流量が高密度ま

²縦軸に流量、横軸に車の密度をとったものであり、交通流の特徴を表現する最も重要な図である

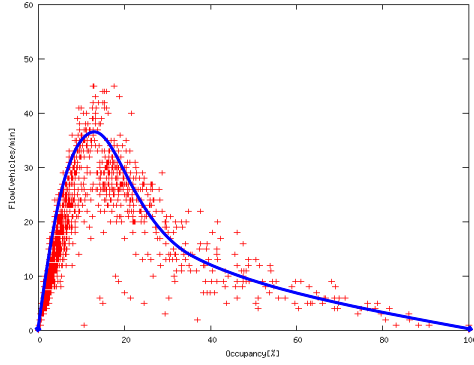


図 4: 首都高速道路 (小菅 JCT 付近) における実測基本図. 赤い点が実データを表し, 青実線が近似した関数の形のイメージである.

で伸びており, 上に凸な放物線で近似するよりも, むしろ青実線で表現されるような関数形を用いることが自然であると言える. そこで, Greenshield の観測結果に変えて, 以下のように, 密度の高次のオーダーで表現した速度密度関係式を用い, m-Payne モデルとする.

$$V_{opt}(\rho) = V_0 \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}\right)^2 \left(2 - \frac{\rho}{\rho_{max}}\right) \quad (3)$$

この関数を用いた場合の基本図を図 3 の実線で示す. 最適速度関数をこのような密度に関する三次関数として表現することで, 下に凸な部分が高密度部に現れる. これは, 従来の流体力学では存在し得ない膨張衝撃波が存在することを示しており, この膨張衝撃波に関する議論は [8] に詳しい.

3 Linear Stability Analysis

前節で提案した高次速度密度関係式を用いた m-Payne モデルに対して, 線型安定性解析を行う.

まず, 一様流解 $\rho = \rho_0, V = V_{opt}(\rho_0)$ に対して, 小さい擾乱を加え,

$$\begin{cases} \rho = \rho_0 + \tilde{\rho} \\ V = V_{opt}(\rho_0) + \tilde{V} \end{cases} \quad (4)$$

とし,

$$\tilde{\rho}, \tilde{V} \sim \exp(i(kx + \omega t)) \quad (5)$$

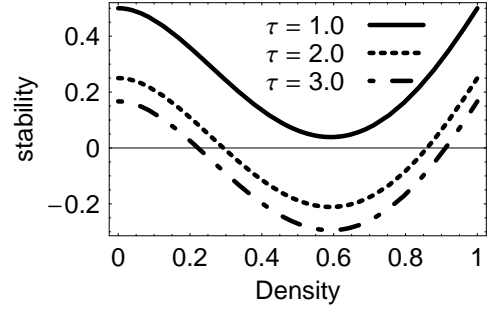


図 5: 高次速度密度関係式を用いた m-Payne モデルの安定性プロット.

と置くと, 分散関係式は

$$\begin{aligned} \omega + kV_{opt} \\ = \frac{i}{2\tau(\rho_0)} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 + 4a_0^2\tau(\rho_0)^2(2k\rho_0i - k^2)} \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

となる. これより安定性条件は, 高次速度密度関係式 (3) とあわせて

$$\frac{\rho_{max}}{2\tau V_0} > \rho_0^2 \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_{max}}\right) \left(5 - \frac{3\rho_0}{\rho_{max}}\right) \quad (7)$$

と求まり, 高次速度密度関係式を導入した m-Payne モデルにも一様流不安定性が存在することがわかった.

Greenshield 関係式を用いた場合の安定性条件は $\frac{\rho_{max}}{2\tau V_0} > \rho_0$ となり, そのプロットが図 2 である. また, 図 5 が高次速度密度関係式を用いた場合の安定性領域を示したものである. これらの図から, m-Payne モデルの場合, $0.4 \sim \rho \sim 0.8$ では不安定であるが, 高密度で安定になっており, Greenshield 関係式を用いた場合の安定性解析では見られなかった高密度での安定性が存在していることがわかった. このことから, m-Payne モデルでは一様流不安定性を持ち, かつ, 高密度での安定性を再現することができたといえる.

また, m-Payne モデルの数値計算結果は図 6 のようになる. この図から, 擾乱に対して m-Payne モデルは安定であり, 時間発展とともに減衰していくことがわかった. この数値計算の初期状態では, 擾乱が前方にも伝わっていたが, これはエバネッセント波と呼ばれるものであり, すぐに減衰することもわかった. さらに, 擾乱の伝播の形は, 急斜面側を前方とするのではなく, 緩斜面側を前方としており, これは, 伝播する衝撃波が圧縮衝撃波ではなく, 膨張衝撃

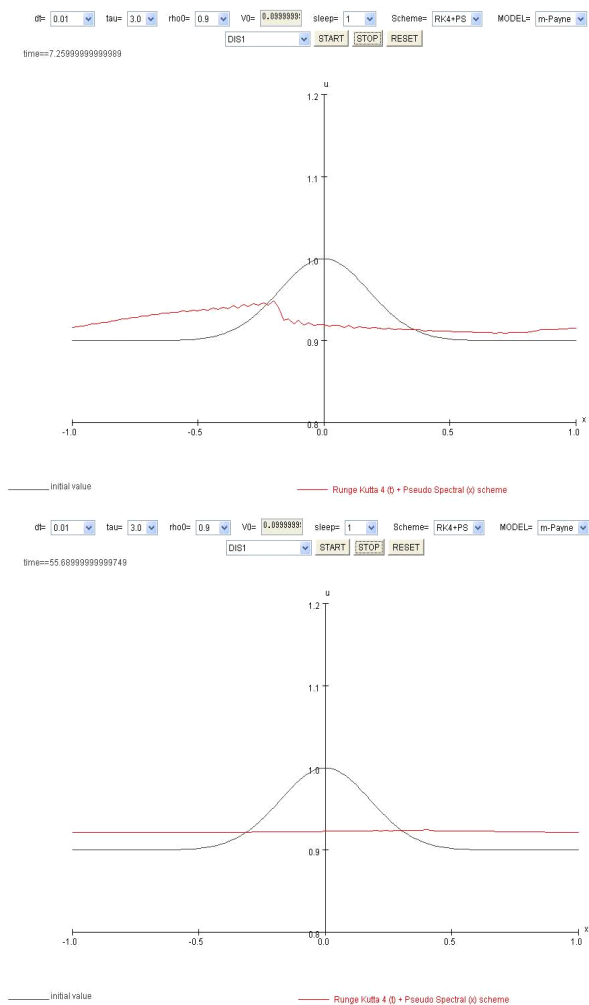


図 6: 高次速度密度関係式を用いた Payne モデルの時間発展の様子 ($\rho_0 = 0.9, \Delta t = 0.01, \tau = 3.0$). 縦軸が密度であり、横軸が空間を示す. 時間発展の初期状態が上図であり、下図は安定し始めた時間でのプロット.

波であることを意味しており、基本図での高密度側に生じる膨張衝撃波との対応も確認できた。

4 CONCLUSION

本研究では、Greenshield の観測結果を用いた速度密度関係式を実測基本図データを再現するように、高次の速度密度関係式に改良し、線型安定性解析と数値計算を行った。この高次の速度密度関係式を用いることで、線型安定性解析では、従来の Payne モデルでは存在しなかった高密度での安定性が再現された。また、高密度での擾乱に対する数値計算では、波が発散することなく減衰しながら伝播することも観

測された。

今後の課題として、Kerner らは拡散項を導入した改良モデルを提案し安定化を図ったが、拡散項を導入することなく、本講演の m-Payne モデルをさらに改良することで非線形飽和現象が起こり、安定な衝撃波を形成するモデルの構築を目指す。

参考文献

- [1] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata and Y. Sugiyama, *PHYS. REV. E* **51**(2) (1995), pp.1035
- [2] M.Kanai, K.Nishinari and T.Tokihiro, *PHYS. REV. E* **72** (2005), pp.035102-1
- [3] M. J. Lighthill and G. B. Witham, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **229** (1955), pp. 317.
- [4] G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves* (John Wiley and Sons, New York, 1974)
- [5] H. J. Payne, in *Mathematical Models of Public Systems*, edited by G. A. Bekey (1971), pp. 51
- [6] B. S. Kerner and P. Konhaeuser, *Phys. Rev. E*, **48** (1993), pp. R2335
- [7] B. D. Greenshields, in *Proceedings of the Highway Research Board*, Washington, D. C., **14** (1935), pp. 448.
- [8] 社本 大輔, 平成 19 年度 東京大学工学部航空宇宙工学科卒業論文