

交通流 S-NFS モデルにおける開放系相図の平均場近似

酒井聡士¹, 西成活裕², 飯田晋司¹

¹ 龍谷大学 理工学研究科 数理情報学専攻

² 東京大学 工学系研究科 航空宇宙工学専攻

概要

交通流解析の研究において、セルオートマトンを用い、開放系相図の相転移について調べるといったものがある。ASEP の開放系相図についてはすでに知られている。本稿では、より現実的な統合モデル S-NFS モデルの開放系相図をシミュレーションによって求め、近似を用いて理論的に相図の相転移ラインを求める。

Phase diagrams at open boundary condition of S-NFS model of traffic flow using mean field approach.

Satoshi Sakai¹, Katsuhiro Nishinari², Shinji Iida¹

¹ Department of Applied Mathematics and Informatics, Ryukoku University

² Department of Aeronautics and Astronautics, Tokyo University

Abstract

There are investigations about traffic flow by using cellular automaton, and analyses about phase transition of phase diagram at open boundary condition. The phase diagram of ASEP is already known. In this paper, we calculate phase diagram of S-NFS model which is more realistic and general model, with numerical simulations, and we obtain analytic expressions of the phase transition line by using approximation.

1 はじめに

交通流に関する研究は、今やマスコミに取り上げられたり本になったりして、有名になりつつある [10]。交通流モデル [2] については、数理的に現象を抽出しやすくしてシミュレーションしやすいことから、セルオートマトン (CA) という手法を用いて活発に議論されている [1, 4, 5, 6, 7, 8, 11]。本稿では、確率的に拡張された統合モデルである S-NFS モデルの開放系相図をシミュレーションによって作成し、その相転移ラインを近似を用いて理論的に求める。

2 S-NFS モデル

2004 年 2 月、西成、福井、シャドシュナイダー (Schadschneider) によって一度止まった車の加速が遅れる「スロースタート効果」、運転手が 1 台

以上先まで見通して運転している「見通しの効果」を取り入れたラグランジュ表現統合モデルが発表された [11]。そのモデルを NFS (Nishinari-Fukui-Schadschneider) モデルと呼び、それを確率的に拡張したモデルを S (Stochastic) -NFS モデルと呼ぶ [14]。

S-NFS モデルは、時刻 t における i 番目の車の位置座標を x_i^t 、速度を $v_i^{(0)}$ とおいて

$$v_i^{(1)} = \min\{V_{\max}, v_i^{(0)} + 1\} \quad (1)$$

$$v_i^{(2)} = \min\{v_i^{(1)}, x_{i+S}^{t-1} - x_i^{t-1} - S\} \quad (2)$$

$$v_i^{(3)} = \min\{v_i^{(2)}, x_{i+S}^t - x_i^t - S\} \quad (3)$$

$$v_i^{(4)} = \max\{0, v_i^{(3)} - 1\} \quad (4)$$

$$v_i^{(5)} = \min\{v_i^{(4)}, x_{i+1}^t - x_i^t - 1 + v_{i+1}^{(4)}\} \quad (5)$$

$$x_i^{t+1} = x_i^t + v_i^{(5)}. \quad (6)$$

と表すことができる．ここで， $V_{\max} \geq 1$ は車の最高速度， $S \in \{1, 2\}$ は運転手の見通せる台数を意味している．また，本モデルでは，ランダムブレーキ確率 $1-p$ ，スロースタート確率 q ，見通しが 2 になる確率 r を導入して，確率 $p, 1-q$ でそれぞれのルール (4), (2) をスキップ，確率 r で見通し $S = 2$ ， $1-r$ で見通し $S = 1$ とする．上記のルール (1) から (6) は $t \rightarrow t+1$ の 1 時間ステップを表して，次の時間ステップでは $v_i^{(0)} \leftarrow v_i^{(5)}$ としてこれらのルールを平行に再適用する．

この S-NFS モデルは，パラメータ V_{\max}, p, q, r を変えることで，すでに知られている交通流 CA モデルを再現する事ができる．例えば， $V_{\max} = 1, q = r = 0.0$ とすると「ASEP (非対称単純排他過程)」[13]; ASEP からさらに $p = 1.0$ とすると「ルール 184」[16]; $V_{\max} = p = 1$ として q または r の片方を 1.0，もう一方を 0.0 にするとそれぞれ「スロースタートモデル」[15] または「クイックスタートモデル」[12]; $q = r = 0.0$ とすると Nagel-Schreckenberg (NS) モデル [9]; NS モデルから $p = 1.0$ にすると，加速を 1 づつと制限した Fukui-Ishibashi モデル [3] となる事がわかる．

3 開放系相図

以下では，開放系境界条件において $V_{\max} = 1, p = 1.0$ の S-NFS モデルを考える．境界のルールは，

- 1) 位置 $-2, -1$ にセルを作成し，それぞれのセルについて確率 α で車を入れる
- 2) 位置 $L, L+1$ にセルを作成し，それぞれのセルについて確率 $1-\beta$ で車を入れる (右端の車が出ることを妨げる)
- 3) さらに，位置 $L+2, L+3$ にセルを作成し，その 2 セルには車を常に入れておく ($-2, \dots, L+1$ にいる全ての車に，2 台先の車が存在するようにしておく)
- 4) S-NFS モデルのルール (1)–(6) を $-2, \dots, L+1$ にいる車に適用する (ただし，スロースタート効果 (2) は， $0 \leq x_i^{t-1}$ かつ $x_{i+S}^{t-1} \leq L-1$ を満たす車にのみ適用する)
- 5) $-2, -1$ と $L, \dots, L+3$ にいる車を削除する

を 1 時間ステップにおいて行うものである (図 1 参照)．

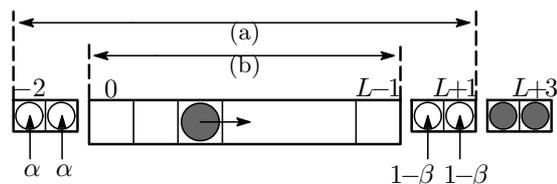


図 1. S-NFS モデル ($V_{\max} = 1$) の開放系ルール．(a): ルール (1)–(6) を適用する範囲．(b): スロースタート効果のルール (2) が効力を持つのは， $0 \leq x_i^{t-1}$ かつ $x_{i+S}^{t-1} \leq L-1$ のとき．

このルールを用いて，車の流入確率 α と流出確率 β について開放系相図を求めたい．ここでは，ASEP の相図が流量と α, β の関係から求まる [13] ことを用い，flow- α - β 図を用いて解析する．ASEP の相図と flow- α - β 図の関係は，図 2 の通りである．S-NFS

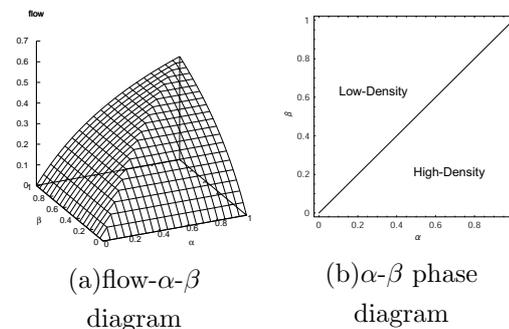


図 2. ASEP ($p = 1.0$) の flow- α - β 図と，それに対応する開放系相図．一次相転移ラインは， $\beta = \alpha$ で与えられる．

モデルについて，flow- α - β 図の例は，図 3 のようになっている．

次の章では，flow- α - β 図の等高線グラフを相図として用い，その相転移ラインを求める．

4 相転移ラインの近似的導出

本章では，S-NFS モデルの開放系相図について，一次相転移ラインを求めよう．その方法は，まず境界左右端の流量と密度の関係を平均場近似を用いて求め，次に，周期的境界条件で求めた流量-密度図 (基本図) のグラフを直線で近似し，最後にそれらの関係式を用いて相転移ライン $\beta(\alpha)$ を導出するというものである．この方法は，論文 [1, 8] の方法を拡張したものである．

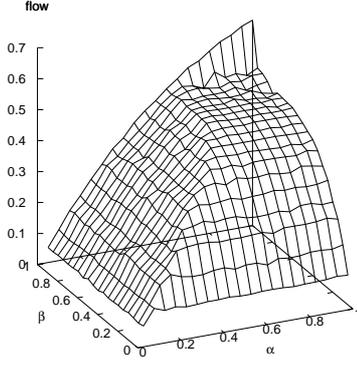


図3. S-NFS モデル($p = q = r = 1.0, V_{\max} = 1$)の flow- α - β 図. $\beta = 1.0$ 付近で流量が急激に増加しているのは, $q \neq 0$ のときでもスロースタート効果をもつ車がないからである.

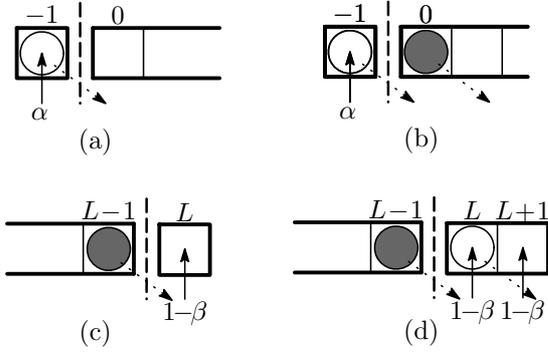


図4. 左右端で流量が発生する, 車の配置

4.1 左右端の流量と密度の関係

はじめに, 左端と右端で発生する流量 J_l, J_r を求めよう. それぞれの境界に流量を発生させる車の配列は, 図4の通りである. 平均場近似を用いると, (a)の配置をとる確率は $c_{(-1)}[1 - c_{(0)}]$, 同様に (b), (c), (d)の配置をとる確率は, それぞれ $rc_{(-1)}c_{(0)}[1 - c_{(1)}], c_{(L-1)}[1 - c_{(L)}],$ そして $rc_{(L-1)}c_{(L)}[1 - c_{(L+1)}]$ となる. ただし, $c_{(j)}$ は位置 j に車がいる確率と定義されている. ここで, $c_{(-1)} = \alpha, c_{(L)} = c_{(L+1)} = 1 - \beta$ であるから, $c_{(0)} = c_{(1)}$ を仮定すると

$$\begin{cases} J_l = \alpha(1 - c_{(0)})(1 + rc_{(0)}) \\ J_r = \beta[1 + r(1 - \beta)]c_{(L-1)} \end{cases} \quad (7)$$

を得ることができる¹.

¹ただし, 図4(b)の配置において, 位置0の車にスロースタート効果が働いて停止する確率を, 無視している.

4.2 基本図の直線による近似的導出

次に, 周期的境界条件によって作成した基本図について, 自由走行相と渋滞相のグラフを直線で近似して求めよう. いま, 自由走行相と渋滞相の流量をそれぞれ J_f, J_j とおいて,

$$\begin{cases} J_f = c_{(0)} \\ J_j = x(1 - c_{(L-1)}) \end{cases} \quad (8)$$

と直線で近似する(図5). ただし, x は渋滞相の傾きの絶対値である. ここでは, この x を渋滞クラスタの後退現象を用いて求める.

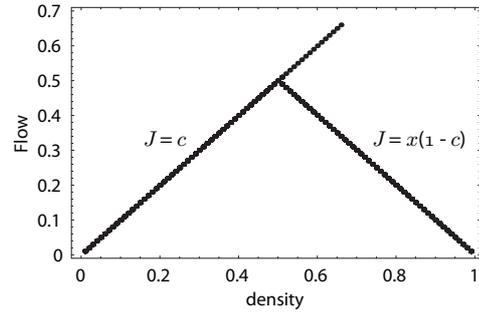


図5. S-NFS モデルの基本図. パラメータは $p = q = r = 1.0, V_{\max} = 1, L = 100$. 各密度について, 異なる初期配置で10回シミュレーションしたグラフである. 流量の計算は, 1回のシミュレートにつき $t = 50$ から $t = 100$ までの平均をとっている. 一様な初期配置を与えたとき, メタ安定分岐は明らかに見られる.

図6は, クラスタの右端で起こりうる配列を表している. ただし, 確率 $u_g(t), g \in \{0, 1, 2\}$ は, 時刻 t におけるクラスタ右端の傾きが g になる確率と定義されている. ここで, $u_g(t)$ の時間遷移をあらわすマスター方程式は

$$u_0(t+1) = u_1(t)q(1-r) + u_2(t)q \quad (9)$$

$$\begin{aligned} u_1(t+1) &= u_0(t)(1-r) \\ &+ u_1(t)(1-r+qr)(1-q+qr) \\ &+ u_2(t)(1-q)(1-r+qr) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} u_2(t+1) &= u_0(t)r \\ &+ u_1(t)r(1-q)(1-q+qr) \\ &+ u_2(t)r(1-q)^2 \end{aligned} \quad (11)$$

となる. 定常状態すなわち $u_g(t+1) = u_g(t) = u_g$ として式(9)-(11)を解いて期待値 $x = 0u_0 + 1u_1 + 2u_2$

をとると,

$$x = x(q, r) = \frac{1 + r - qr + q^2r - 2q^2r^2}{1 + q - qr + qr^2 - 2q^2r^2} \quad (12)$$

を得ることができる.

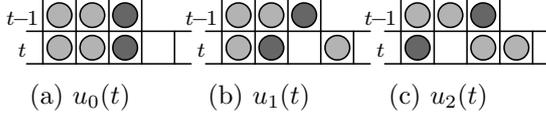


図 6. $u_g(t)$ と車の配置の関係

4.3 相転移ラインの導出

最後に, 上記の結果を用いて相転移ラインを導こう. 式 (7), (8) を用いると, $J_f = J_l, J_j = J_r$ より

$$c_{(0)} = \alpha[1 - c_{(0)}][1 + rc_{(0)}] \quad (13)$$

$$x[1 - c_{(L-1)}] = \beta[1 + r(1 - \beta)]c_{(L-1)} \quad (14)$$

を得ることができる. これらの式より $c_{(0)}, c_{(L-1)}$ が決まり, さらに相転移ラインの特徴である $J_f = J_j$ の関係を用いると,

$$\beta = \frac{1+r}{2r} + \frac{\sqrt{[c_{(0)} - x]^2(1+r)^2 + 4rx[c_{(0)} - x]c_{(0)}}}{2r[c_{(0)} - x]} \quad (15)$$

となり, β を q, r と α によって表すことに成功した. ただし,

$$c_{(0)} = \frac{1}{2r\alpha} \left[\alpha(r-1) - 1 + \sqrt{\alpha^2(1+2r+r^2) + 2\alpha(1-r) + 1} \right] \quad (16)$$

である. 図 7 は, 図 3 の等高線表示と式 (15) のグラフを比較したものである.

参考文献

- [1] C. Appert and L. Santen, Phys. Rev. Lett. **86**, 2498–2501, 2001.
- [2] D. Chowdhury, L. Santen, and A. Schadschneider, Phys. Rep. **329**, 199–329, 2000.
- [3] M. Fukui and Y. Ishibashi, J. Phys. Soc. Japan **65**, 1868–1870, 1996.
- [4] D. Huang, Phys. Rev. E **72**, 016102, 2005.

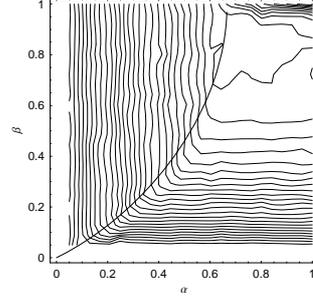


図 7. 図 3 の等高線と, 近似によって求めた相転移ライン (式 (15)) の比較

- [5] M. Kanai, K. Nishinari, and T. Tokihiro, Phys. Rev. E **72**, 035102, 2005.
- [6] M. Kanai, K. Nishinari, and T. Tokihiro, J. Phys. A: Math. Gen. **31**, 6911–6919, 2006.
- [7] B. S. Kerner, S. L. Klenov, and D. E. Wolf, J. Phys. A: Math. Gen. **35**, 9971–10013, 2002.
- [8] A. B. Kolomeisky, G. M. Schütz, E. B. Kolomeisky, and J. P. Straley, J. Phys. A: Math. Gen. **31**, 6911–6919, 1998.
- [9] K. Nagel and M. Schreckenberg, J. Phys. I France **2**, 2221–2229, 1992.
- [10] 西成活裕, 「渋滞学」, 新潮社, 東京, 2006.
- [11] K. Nishinari, M. Fukui, and A. Schadschneider, J. Phys. A: Math. Gen. **37**, 3101–3110, 2004.
- [12] K. Nishinari and D. Takahashi, J. Phys. A: Math. Gen. **33**, 7709–7720, 2000.
- [13] N. Rajewsky, L. Santen, A. Schadschneider, and M. Schreckenberg, J. Stat. Phys. **92**, 151–194, 1998.
- [14] S. Sakai, K. Nishinari, and S. Iida, J. Phys. A: Math. Gen., to be published.
- [15] M. Takayasu and H. Takayasu, Fractals **1**, 860–866, 1993.
- [16] S. Wolfram, “Theory and Applications of Cellular Automata”, World Scientific, Singapore, 1986.