非対称単純排他過程による交通流モデルとその基本図

金井政宏 [1]，西成活裕 [2]，時弘哲治 [1]

[1] 東京大学 大学院数理科学研究科
[2] 東京大学 大学院工学系研究科 航空宇宙工学専攻

概要

本研究では，非対称単純排他過程により交通流をモデル化し，これに対する基本図を与える．任意のシステムサイズに対して厳密に解くことの出来るゼロ距離過程が特別な場合に非対称単純排他過程に帰着されることに着目して流量を計算し，さらにその漸近展開を得た．

Fundamental diagram of the asymmetric simple exclusion process

Masahiro Kanai[1], Katsuhiro Nishinari[2], Tetsuji Tokihiro[1]

[1] Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo, 3-8-1 Komaba, Tokyo 153-8914, Japan
[2] Department of Aeronautics and Astronautics, Faculty of Engineering, The University of Tokyo, 7-3-1 Hongo, Tokyo 113-8656, Japan

Abstract

In this paper, we provide the fundamental diagram of the asymmetric simple exclusion process using the formulation for an exactly solvable stochastic process, i.e., the zero-range process. It is known that, in a special case, the zero-range process corresponds to the asymmetric simple exclusion process. We stress that our approach gives the higher-order correction terms to the fundamental diagram in terms of system size.

1 非対称単純排他過程とゼロ距離過程

交通流の特徴は,「志向性」「排除体積」「反応時間」と考えられる．そこで，周期境界を持つ一次元格子上を粒子が一定の方向へ確率的に運動する模型（格子気体模型あるいは Cellular Automata）によるモデル化を考える．このとき，各サイトには高々一つの粒子が入り (exclusion rule)，粒子は各離散ステップ毎に同時に運動する (parallel update rule) ものとする．以下で，それらの基本的なモデルとなる非対称単純排他過程 (ASEP) とゼロ距離過程 (ZRP) を導入し，前者が後者の特別な場合であることを見る．

1.1 ASEP

ASEP を以下のように定義する．粒子が運動する際，各粒子は一定の確率 p を以って次のサイトに移動する．このとき，もし移動しようとするサイトが他の粒子によって占有されているならばこの移動は無効となる（図 1）．

1.2 ZRP

ZRP は以下のように定義される．ASEP と同じく一次元格子上でサイト間を移動する粒子系により記述される．ZRP の場合，ASEP と異なり各サイトに複数の粒子が入ることが可能となる．そして，各粒子の移動確率は，その粒子の移動前のサイトに入っ

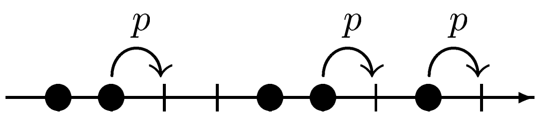

図 1: 黒玉は粒子を表わし，各サイトには高々一つの粒子が入る (exclusion rule)．各粒子は右方向に一定の確率 p で一サイトずつ移動していく．移動は時間ステップ毎に一斉に行われる (parallel update rule)．もし移動しようとするサイトが他の粒子によって占有されているならばこの移動は無効となる．

ている粒子数の関数として与えられる．ZRP は排他過程への対応付けが可能であって，それは ZRP のサイトを排他過程の粒子に対応させ，さらに ZRP の粒子を排他過程での粒子間の空きサイトに対応させることにより実現される（図 2）．ここで，両モデルの粒子の移動確率は（進行方向は逆転するが）そのまま対応し，特に一定値に取った場合に ZRP は ASEP と同等になる．以降，ASEP も ZRP の表示で考えることにする．すなわち，粒子及びサイトといった場合は ZRP のものを指すものとする．

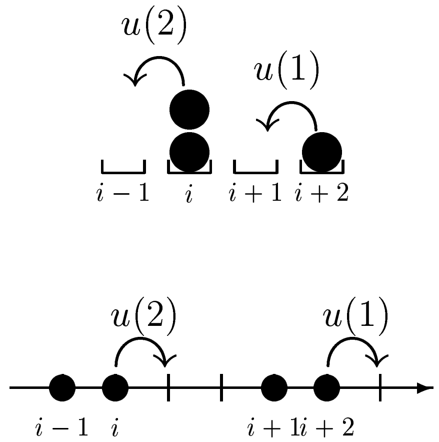

図 2: 上段：ZRP の時間発展．各サイトは複数の粒子を載せることができ，各粒子は同じサイトにある粒子の総数 n に依存した確率 $u(n)$ で隣のサイトに移動する．この意味でこれらの粒子はゼロ距離相互作用を持つ．下段：ZRP の時間発展と等価な排他過程．各サイトは一つの粒子しか載せることができない．この意味で排他過程と呼ばれる．各粒子は車間距離に応じた確率で隣のサイトに移動する．上段の粒子数を下段の車間距離と見れば両者は完全に対応する．

2 ZRP の非平衡定常状態

ZRP や ASEP のような確率過程はマルコフ過程に属する．すなわち，時刻 t に系がある配置 $\{n_1,\ldots,n_M\}$ を取る確率 $P(\{n_m\},t)$ はその直前の時刻の確率分布のみによって決まる．ただし，n_m はサイト m に入っている粒子数を示す．今のモデルでは離散時間で考えているので，確率分布の時間発展を定めるマスター方程式は

$$
\begin{aligned}
&P(\{n_m\},t+1)-P(\{n_m\},t)\\
&\quad=\sum_{\{n'_m\}\neq\{n_m\}}\Big[T(\{n_m\}|\{n'_m\})P(\{n'_m\},t)\\
&\qquad\qquad-T(\{n'_m\}|\{n_m\})P(\{n_m\},t)\Big]
\end{aligned}
\tag{1}
$$

により与えられる．ここで，$T(\{n_m\}|\{n'_m\})$ は状態 $\{n'_m\}$ から $\{n_m\}$ への遷移確率を表わし，

$$
\begin{aligned}
&T(\{n_m\}|\{n'_m\})\\
&\quad=\sum_{\nu_1=0}^{1}\cdots\sum_{\nu_M=0}^{1}\left[\prod_{k=1}^{M}u(n'_m)\delta(\Delta n_k)\right]
\end{aligned}
\tag{2}
$$

となる．ただし，N は粒子数，M はサイト数であり，$u(n)$ は n 個の粒子が入ったサイトから一つの粒子が隣のサイトに移動する確率を与え，特に $u(0)=0$ である．δ はデルタ関数で $\Delta n_k=n_k-n'_k+\nu_k-\nu_{k-1}$ $(\nu_m=0,1)$ はサイト k の粒子の増加量を示す．

非平衡系の定常状態は，その実現確率が $P(\{n_m\},t+1)=P(\{n_m\},t)$ という条件を満たすマスター方程式の解として定義される．この解を $P^*(\{n_m\})$ と書くことにすると，遷移確率の規格化条件

$$
\sum_{\{n'_m\}}T(\{n'_m\}|\{n_m\})=1 \tag{3}
$$

により，定常状態に対してマスター方程式 (1) は

$$
P^*(\{n_m\})=\sum_{\{n'_m\}}T(\{n_m\}|\{n'_m\})P^*(\{n'_m\}) \tag{4}
$$

と書き直される．

ZRP の最も著しい特徴は，非平衡定常状態が積の形に書けることである．すなわち，非平衡定常状態の実現する確率 $P^*(\{n_m\})$ がある因子 $f(n)$ によって

$$
P^*(\{n_m\})=Z_{M,N}^{-1}\prod_{m=1}^{M}f(n_m) \tag{5}
$$

という形に表わされる．ここで，$Z_{M,N}$ は規格化定数であり，平衡統計力学での分配関数に当たる役割

を果たす．そこで，これを分配関数と呼ぶことにすると，(5) から $Z_{M,N}$ は

$$Z_{M,N}=\sum_{\{n_m\}}\prod_{m=1}^{M}f(n_m)\delta\left(\sum_{m=1}^{M}n_m-N\right) \tag{6}$$

と書かれることが分かる．δ はデルタ関数である．まず，ZRP の場合について計算を進める．ここでは [1] に従って，因子 $f(n)$ を

$$f(n)=\begin{cases}1-u(1) & (n=0)\\ \dfrac{1-u(1)}{1-u(n)}\displaystyle\prod_{j=1}^{n}\dfrac{1-u(j)}{u(j)} & (n\geq 1)\end{cases} \tag{7}$$

とする．これが (4) の解であることは代入することにより確かめられる [2].

3　ASEP の厳密解

既に述べたように ASEP は ZRP の特別な場合に相当する．一方で，ZRP の非平衡定常状態は形式的ではあるが厳密な表示を持つ．そこで，ASEP に対応する ZRP の分配関数を計算することにより ASEP の分配関数を求める [2, 3].

3.1　分配関数 $Z_{M,N}$ の母函数

非平衡定常状態における確率分布は (5) により与えられている．定常状態においてあるサイトに n 個の粒子が入っている確率 $p(n)$ は (5) から

$$\begin{aligned}p(n)=&\sum_{n_2+\cdots+n_M=N-n}P^*(\{n,n_2,\ldots,n_M\})\\=&f(n)\frac{Z_{M-1,N-n}}{Z_{M,N}}\end{aligned} \tag{8}$$

により得られる．そして，$p(n)$ の n についての総和は定義により 1 だから我々は分配関数 $Z_{M,N}$ に対して次の漸化式を得る：

$$Z_{M,N}=\sum_{n=0}^{N}f(n)Z_{M-1,N-n},\ Z_{1,k}=f(k)\ (k\geq 1). \tag{9}$$

この漸化式により原理的には有限のシステムサイズ M, N に対して，分配関数を計算することが出来る．

次に，因子 $f(n)$ および分配関数 $Z_{M,N}$ の母函数 $\widehat{f}(\zeta):=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)\zeta^n$, $\widehat{Z}_M(\zeta):=\sum_{n=0}^{\infty}Z_{M,n}\zeta^n$ を考え，漸化式 (9) をこれらを用いて書き直すと

$$\widehat{Z}_M(\zeta)=\widehat{f}(\zeta)\widehat{Z}_{M-1}(\zeta) \tag{10}$$

を得る．ここで，(9) が二つの添字 M,N に対する二重漸化式になっているのに対して，(10) は一つの添字 M のみの漸化式になっている．(10) から

$$\widehat{Z}_M(\zeta)=\left(\widehat{f}(\zeta)\right)^M \tag{11}$$

を得る．

3.2　平均速度

ここで，平均速度に対する表式を与えておく．まず，(7) から次の漸化式を得る：

$$u(n+1)f(n+1)=f(n)-u(n)f(n). \tag{12}$$

平均速度 $v_{M,N}$ は

$$v_{M,N}=\sum_{n=0}^{N}u(n)p(n)=\sum_{n=0}^{N}u(n)f(n)\frac{Z_{M-1,N-n}}{Z_{M,N}} \tag{13}$$

により分配関数から計算される．$u(n)$ に対する漸化式 (12) および (13) から

$$v_{M,N+1}Z_{M,N+1}=Z_{M,N}-v_{M,N}Z_{M,N} \tag{14}$$

を得る．(14) を N に関して解くことにより，平均速度に対する表式

$$v_{M,N}=-\frac{\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^nZ_{M,n}}{(-1)^NZ_{M,N}} \tag{15}$$

を得る [3].

3.3　ASEP の分配関数及び平均速度

ここから，ASEP の計算に入るために

$$u(0)=0,\quad u(n)=p\quad (0<p<1,\ n\geq 1) \tag{16}$$

とする．これによって ZRP が ASEP に対応する．(11) から分配関数の母函数は

$$\widehat{Z}_M(\zeta)=\sum_{k=0}^{M}\binom{M}{k}\gamma^{M-k}\left(\frac{\beta\zeta}{1-\beta\zeta}\right)^k \tag{17}$$

となる．ただし，便宜上 $\gamma:=1-p$, $\beta:=(1-p)/p$ と置いた．ここで，無限級数に対するオイラー変換

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k=\frac{1}{1+z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{1+z}\right)^nb_n, \tag{18}$$

$$b_n:=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a_r \tag{19}$$

を用いると，(17) は以下のように変形できる：

$$\widehat{Z}_M(\zeta) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n-1})(\beta\zeta)^n \tag{20}$$

$$b_n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\binom{M}{r}\gamma^{M-r} \tag{21}$$

である．ここで右辺の係数は

$$b_n - b_{n-1} = \sum_{r=1}^{n}\binom{n-1}{r-1}\binom{M}{r}\gamma^{M-r} \tag{22}$$

となる．また，$b_0 = \gamma^M$ である．従って，分配関数 $Z_{M,N}$ の母函数は

$$\widehat{Z}_M(\zeta) = \gamma^M + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{r=1}^{n}\binom{n-1}{r-1}\binom{M}{r}\gamma^{M-r}\beta^n\right]\zeta^n \tag{23}$$

となる．以上から分配関数は

$$Z_{M,N} = \beta^N\gamma^{M-1}MF(1-N, 1-M; 2; \gamma^{-1}) \tag{24}$$

と得られる．ただし，$(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1)$ は Pochhammer の記号で，また，$F(\alpha,\beta;\gamma;z)$ はガウスの超幾何関数

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n}z^n \tag{25}$$

である．

平均速度を計算するために (15) の分子を先に計算しておく．これは超幾何関数のパラメータに関する漸化式を用いて

$$\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n Z_M(n) = (-p)^M F(M, N; 1; 1/(1-p)) \tag{26}$$

となる．よって，平均速度は (15) から

$$v_{M,N} = \frac{(p-1)F(M,N;1;1/(1-p))}{MF(M+1,N+1;2;1/(1-p))} \tag{27}$$

により与えられる [3, 4].

3.4 流量の熱力学極限

基本図は流量の熱力学極限 (M, $N \to \infty$) として求められる．まず，(27) は超幾何関数の微分公式により

$$v_{M,N} = \frac{z-1}{M}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\log\Big[z(1-z)^{M+N} \times F(M+1, N+1; 2; z)\Big] \tag{28}$$

と書くことが出来る．また，この引数は超幾何微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} + \frac{1-M-N}{z-1}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} + \frac{MN}{z(z-1)}w = 0 \tag{29}$$

を満たすから，平均速度 $v_{M,N}$ の満たす非線形微分方程式

$$\frac{p(p-1)}{M}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}v_{M,N} = v_{M,N}^2 - \left(1 + \frac{N}{M}\right)v_{M,N} + \frac{Np}{M} \tag{30}$$

を得る．ここで，ASEP と見た場合のサイト数 $L = M + N$ および粒子密度 $\rho = M/L$ について，平均速度を $v_{M,N} = v_0(\rho) + v_1(\rho)L^{-1} + v_2(\rho)L^{-2} + \cdots$ と展開すると (30) から逐次 $v_0, v_1, v_2, \ldots$ が得られる：

$$v_{M,N} = \frac{1-\sqrt{1-4p\rho(1-\rho)}}{2\rho} + \frac{(1-\rho)p(1-p)}{1-4p\rho(1-\rho)}L^{-1} + \cdots. \tag{31}$$

以上から，ASEP の基本図は，$L \to \infty$ で

$$Q(\rho) = \rho v_0(\rho) = \frac{1-\sqrt{1-4p\rho(1-\rho)}}{2} \tag{32}$$

となる [3].

4 まとめ

本研究では ZRP と ASEP の対応関係に着目し，ZRP の分配関数に対する漸化式を利用することにより ASEP の分配関数を，任意のシステムサイズについて与えた．さらに，この分配関数がガウスの超幾何関数で表わされていることから，超幾何関数の公式を利用して ASEP の基本図を厳密な計算により導出した．また，最近の研究で一般の ZRP についても基本図が得られている [5].

参考文献

[1] M. R. Evans, J. Phys. A **30** (1997) 5669.

[2] M. R. Evans and T. Hanney,

[3] M. Kanai, K. Nishinari and T. Tokihiro, J. Phys. A **39** (2006) 9071.

[4] A. M. Povolotsky and J. F. F. Mendes, J. Stat. Phys. **123** (2006) 125.

[5] M. Kanai *in preparation.*