

引力のある2次元最適速度モデルにおける歩行者流の不安定性

中山章宏¹, 長谷部勝也², 杉山雄規³

¹ 琉球大学 理学部

² 愛知大学 経営学部

³ 名古屋大学 情報科学研究科

概要

引力を導入した2次元最適速度モデルにおいて、一様流の不安定性を線形解析とシミュレーションを用いて調べた。その結果新しいタイプの不安定性が存在することがわかった。

Instability of Pedestrian Flow in 2D Optimal Velocity Model with Attractive Interaction

Akihiro Nakayama¹, Katsuya Hasebe², Yūki Sugiyama³

¹ Department of Physics and Earth sciences, University of the Ryukyus

² Faculty of Business Administration, Aichi University

³ Department of Complex Systems Science, Nagoya University

Abstract

We incorporate an attractive interaction in two dimensional optimal velocity model and investigate the stability of homogeneous flow by the linear analysis and numerical simulations. There exists a new type of instability in this model.

1 はじめに

我々は歩行者やある種の生物（以下では粒子と書く）の集団運動を記述するモデルとして、2次元最適速度モデルを提案した。粒子間の相互作用が反発力のみである場合、このモデルは歩行者流の振舞を記述するものと考えることができる。この場合の性質はすでに解析済みであり、一様流は高密度で不安定になることがわかっている。また、対向流の場合に生じるレーン形成状態からブロッキング状態への遷移も同じメカニズムで統一的に理解できる [1]。

本研究では、上記のモデルに引力も含めた場合について考える。歩行者間に引力が存在するかどうかは不明であるが、生物集団の運動まで広げて考えると、群れを作る生物には遠距離において引力が存在する。ここではそのようなモデルを考える手始めとして、歩行者モデルにそのまま引力を導入した場合の振舞につ

いて議論する [2]。

2 モデル

2次元最適速度モデルは次の式で表わされる。

$$\ddot{\vec{x}}_j(t) = a \left[\left\{ \vec{V}_0 + \sum_k \vec{F}(\vec{r}_{kj}(t)) \right\} - \dot{\vec{x}}_j(t) \right] \quad (1)$$

$$\vec{F}(\vec{r}_{kj}) = f(r_{kj})(1 + \cos \theta) \vec{r}_{kj}/r_{kj} \quad (2)$$

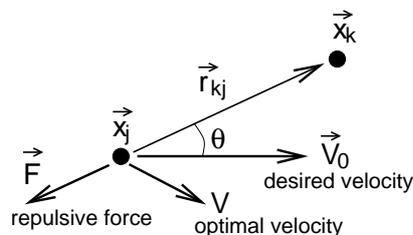


図 1: 変数などの定義

ここで

$$f(r_{kj}) = \alpha[\tanh \beta(r_{kj} - b) + c] \quad (3)$$

と仮定する。相互作用が引力か斥力かはパラメタ c の値で決まる。 $c = -1$ が斥力のみの場合を表わす。(1) 式での総和を有限にするため、 $c > -1$ の場合は適当な距離で相互作用をカットオフしなければならない。以後の数値計算では線形解析と同じ状況になるように適切な値をセットする。

3 線形解析

(1) 式には三角格子構造を持つ自明な一様流解がある。その解の安定性を線形解析を用いて調べる。線形化された方程式は

$$\begin{aligned} \ddot{x}_j &= \sum_k [A_k(x_k - x_j) + B_k(y_k - y_j)] - \dot{x}_j \\ \ddot{y}_j &= \sum_k [C_k(x_k - x_j) + D_k(y_k - y_j)] - \dot{y}_j \end{aligned} \quad (4)$$

となる（感度パラメタ a の扱い、 A_k, B_k, C_k, D_k の詳細については参考文献 [1] を参照）。 k についての和は最近接粒子 6 個について取るものとする。この方程式のモード解は

$$x_j = \epsilon_1 \exp[i\omega t + i(kX_j + mY_j)] \quad (5)$$

$$y_j = \epsilon_2 \exp[i\omega t + i(kX_j + mY_j)] \quad (6)$$

と書け、これを (4) 式に代入することにより、

$$-\epsilon_1 \omega^2 = \epsilon_1 \bar{A} + \epsilon_2 \bar{B} - i\epsilon_1 \omega \quad (7)$$

$$-\epsilon_2 \omega^2 = \epsilon_1 \bar{C} + \epsilon_2 \bar{D} - i\epsilon_2 \omega \quad (8)$$

が得られる。ここで $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ は (4) 式での和を取ったものを表わす。(7),(8) 式は原理的には解くことができるが (ϵ_2/ϵ_1 と ω について解き、安定条件を見れば良い)、複雑になるだけなので、ここでは数値計算による結果を示す。

図 2 において、 $c > -1$ の場合では安定 - 不安定境界は 3 つの曲線からなる。中央と左側の曲線は、反発力のみの場合にわかっていた、 x 軸方向の縦波 ($\epsilon_2 = 0$) と横波 ($\epsilon_1 = 0$) に対する安定条件と重なる。右側の曲線は引力のある場合にのみ現れ、実は直線である。これは楕円偏極モードに対応し、解析が複雑になる。数値シミュレーションにより、このモードでも長波長モードが不安定化することがわかる。そこで先に波長 ($k, m \rightarrow 0$) の極限をとつ

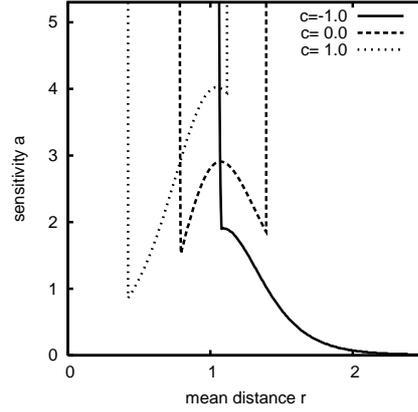


図 2: 数値解。曲線の上側が安定な領域である。

て、式を簡略化すると、 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D} \ll 1$ であることがわかる。その結果、

$$\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} = \frac{1}{2\bar{B}} \left\{ -(\bar{A} - \bar{D}) \pm \sqrt{(\bar{A} - \bar{D})^2 + 4\bar{B}\bar{C}} \right\} \quad (9)$$

$$\omega = i(1 + \bar{A} + \epsilon\bar{B}), \quad -i(\bar{A} + \epsilon\bar{B}). \quad (10)$$

となる。 $\bar{A} + \epsilon\bar{B} \ll 1$ なので、不安定モードは (10) 式の 2 番目の部分からしか現れない。すなわち

$$\bar{A} + \epsilon\bar{B} > 0 \quad (11)$$

が安定条件となる。実際にこの条件を解くと、解は 2 本の直線となり、そのうち 1 本が図 2 の右側に現れる直線と一致する。

4 相図

線形解析の結果を用いて相図を示す。

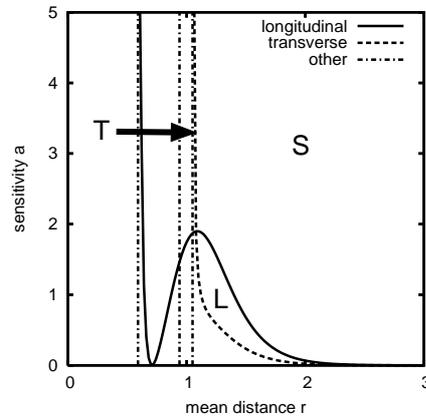


図 3: $c = -1$ の場合

これは $c = -1$ の場合である。楕円モードによる不安定境界線は1つは他のモードと同じ位置（表1参照）、1つは無限遠にあるため、シミュレーションではそのモードは見えない。S は一様流が安定な領域、L は縦波モードだけが不安定、T は横波モードだけが不安定な領域を示す。

	$c = -1.0$	$c = 0.0$	$c = 1.0$
y 横	$0.59 < r$	$0.47 < r$	$0.0 < r$
y 横	$0.94 < r$	$0.73 < r$	$0.0 < r$
楕円	$0.94 < r$	$0.73 < r < 1.39$	$0.42 < r < 1.12$
y 縦	$1.05 < r$	$0.78 < r$	$0.0 < r$

表 1: $c = -1, 0, 1$ の場合のその他のモードの安定条件

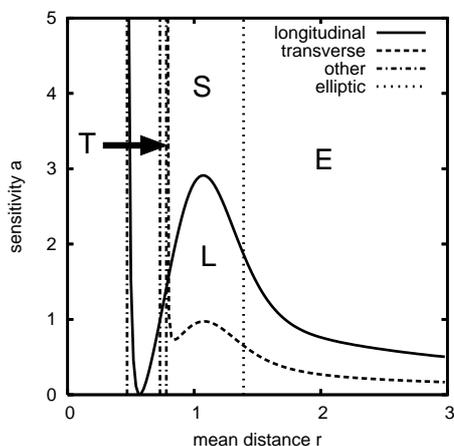


図 4: $c=0$ の場合

$c = 0$ の場合は、楕円モードの境界線は1つが露わになり、このモードによる不安定性を見ることができる（Eで表わされる領域）。

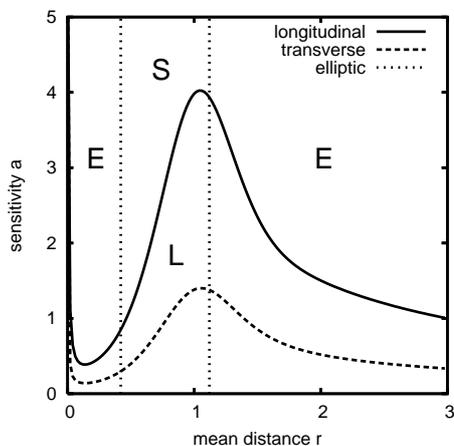


図 5: $c=1$ の場合

$c = 1$ の場合は、横波その他のモードによる不安定領域が $r \sim 0$ に縮小し、遠距離、近距離の両側で楕円モードによる不安定領域だけとなる。

5 シミュレーション

$c = 0$ の場合に行なったシミュレーションの結果を図6に示す。線形解析による結果と一致している。 x 軸方向の縦波、横波の励起はシミュレーションでも明白であるが、楕円モードについては見ただけではそれほど明らかではない。

なお、図6に示してあるスナップショットのうち、縦波と楕円モードが励起されているものはシミュレーションの早い段階であり最終状態は異なる。縦波の場合は図7のようになる。

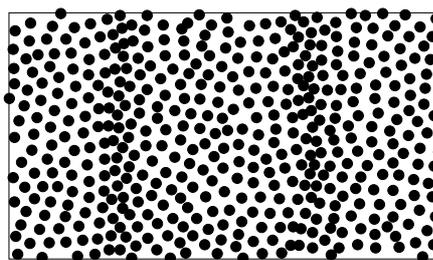


図 7: 縦波が不安定な場合の最終状態の例

一方、楕円モードが不安定な場合の最終状態は、引力をどこでカットオフするかによって異なる。図8は $c = 0$ で $r = 3$ で引力をカットした場合の例である。各クラスタ内では $r = 1$ 、すなわち引力も斥力も働かない中立的な距離で三角格子を構成する。クラスタ間の距離は $r > 3$ となっている。

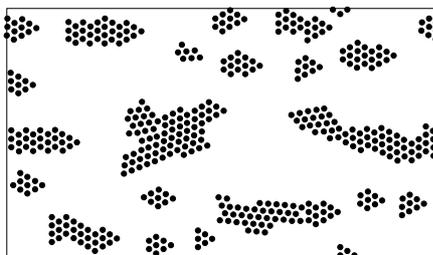


図 8: 楕円モードが不安定な場合の最終状態の例

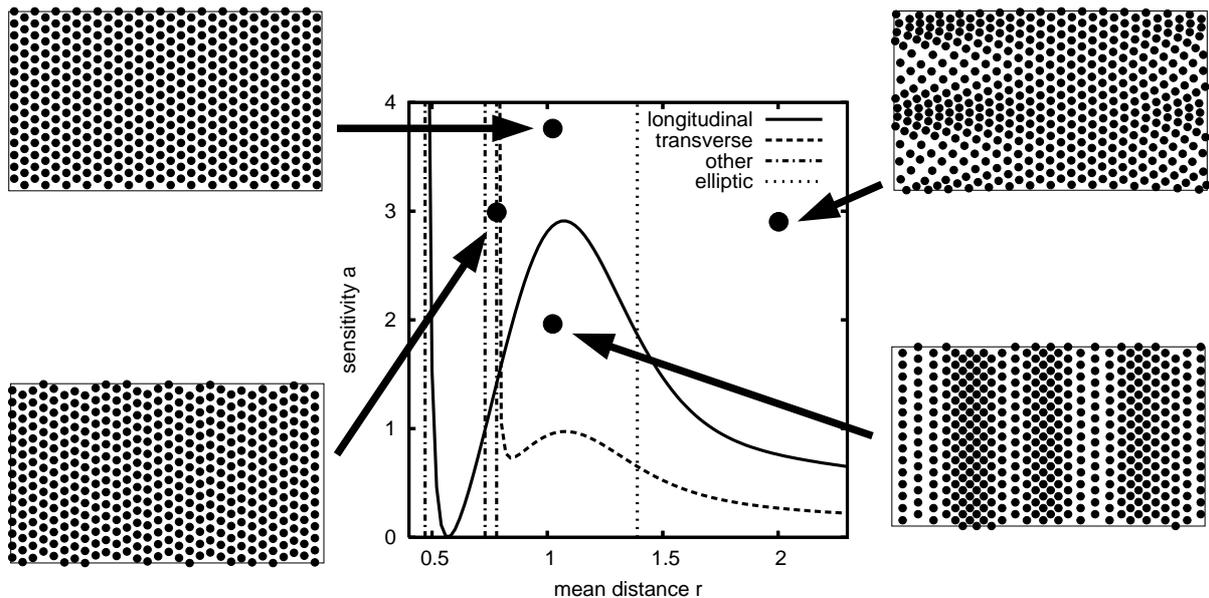


図 6: $c = 0$ の場合の相図とシミュレーションの比較

6 まとめ

ここでは、引力を含めた 2 次元最適速度模型において、一様流の安定性について調べた。その結果、楕円モードに起因する新しい不安定性が見つかった。この不安定性は直感的には明らかである。遠距離で引力、近距離で斥力ならば、その間の力の働かない位置に安定な状態が存在することは自明なように思われる。しかし、図 5 でわかるように、 $c = 1$ の場合（中立な位置は $r \sim 0$ である）でも、楕円モードの安定領域は $r \sim 1$ に存在する。すなわち OV 関数 $f(r)$ の勾配の急な領域に安定領域がある。OV 関数による相互作用はバネに例えることができるが、その場合大きい勾配はバネ定数が大きいことに相当する。したがって、強いバネでつながっている時に安定になるということになる。

このモデルは歩行者の運動を表わす模型として考えられているが、生物の集団運動に対しても適用できる可能性がある。この模型ではすべての粒子が正の x 軸方向に向いて運動することを仮定している。微生物のような特に移動方向の定まっていない運動をする場合は、この仮定を外さなければならず、その場合の安定性の性質は全く異なる。しかし、気流に乗って飛ぶ鳥や海流に乗って移動する魚など、一つの特別な方向がある場合には、この模型がそのまま適用できる。今回の解析で明らかになったことは、低密度側すなわち疎らな状態での運動は不安定で、

その場合、より高密度な群れをいくつかつくった方が安定になるということである。生物の群れ形成はこれと同様のメカニズムで説明できるかもしれない。

謝辞

本研究の一部は文部科学省科学研究費補助金基盤研究 (C) (課題番号: 18540409) の研究助成を受けている。

参考文献

- [1] A. Nakayama and K. Hasebe and Y. Sugiyama, Phys. Rev. E **71** (2005) 036121.
- [2] A. Nakayama and K. Hasebe and Y. Sugiyama, to be published.