

長期記憶を持ち、非常に希に起こる現象の解析とリスクの推測

山崎 和子 & 大城 正典 & 中尾 宏
東京情報大学 環境情報学科
yamasaki@rsch.tuis.ac.jp

November 23, 2005

Abstract

株式市場と通貨市場の価格時系列について、ボラティリティ（上昇率の絶対値）がある閾値 q を超える日の間隔 τ を調べ、次のようなことを発見した。（１）分布関数 $P_q(\tau)$ が平均間隔 $\bar{\tau}_q$ で、 $P_q(\tau) = \bar{\tau}_q^{-1} f(\tau/\bar{\tau}_q)$ のようにスケールされる。（２）代表的な、調べた 7 つの株と 7 つの通貨について、スケールされた関数 $f(x)$ は、どれも同じ形を持つ。（３）ボラティリティの間隔 τ 自体、記憶を持ちクラスタリングが見られる。

キーワード：長期記憶時系列、異常値

関連分野：フラクタル、マルチフラクタル、極値理論

1 はじめに

人間社会の複雑化に伴い、様々なリスクが絡み合って顕在化している。ハリケーンや大雪などの異常気象や地震、原油価格の高騰、ひいては株式市場や外国為替市場の暴落暴騰に至るまで、まれに起こる現象が複雑化したネットワークを通して非常に深刻な結果をもたらす傾向がますます顕著になりつつある。これらの「災害」に対処する科学の発達が望まれている。他方、情報技術やコンピュータ性能の発達により、非常に緻密で膨大なデータを取得し、蓄積し、解析することが可能になり、非常に希に起こる現象でも分析の範疇に入りつつ

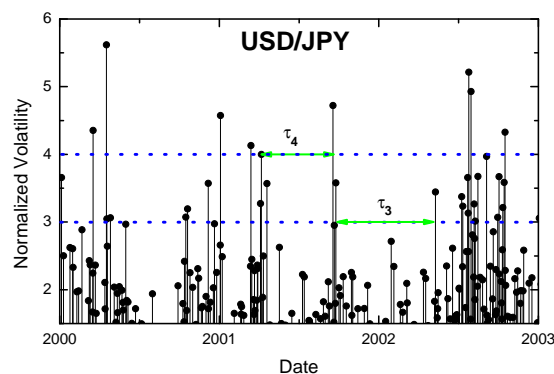


Figure 1: USD/JPY の通貨交換比率 (2000–2002) の標準化したボラティリティ $|\Delta p_i| / (\langle |\Delta p_i|^2 \rangle - \langle |\Delta p_i| \rangle^2)^{1/2}$ について間隔 τ_3 (閾値 $q = 3$) と τ_4 (閾値 $q = 4$) を図式化して示す。

ある。

最近、異常値の解析で極値理論が著しく発達した。しかし、この理論では、個々の事象が独立して生起することが大前提であり、それが大きく理論の適用範囲を制限している。多くの自然現象や社会経済現象は長期記憶を持つと考えられるが、それら記憶を持つ時系列の異常値の解析は、十分な研究がなされていない。定常でランダムな時系列において、一定幅以上の変動の生起はポアソン過程に従い、生起間隔 τ の確率密度関数は平均生起間隔 $\bar{\tau}_q$ の指数分布 $p_q(\tau) \propto \exp(-\tau/\bar{\tau}_q)$ を持つ。したがって、この密度関数は $\bar{\tau}_q$ によりスケールされる。つまり、大きな幅の変動の頻度は小さく τ の統計的性質は悪いが、その確率密度関数を、統計的性質の良い小さな変動の確率密度関数から推測することができる。地震、長期気温の変化などの、長期記憶を持つ様々な時系列についても、同様のスケールが存在し、その確率密度関数が引き延ばされた指数関数 $p_q(\tau) \propto \exp(-(\tau/\bar{\tau}_q)^\gamma)$ になることが最近調べられた。[1][2][3][4][5] 我々は、株式市場や外国為替市場の日次データについて同様の現象を研究し、次のような結果を得た。

- (i) ボラティリティの間隔の確率密度関数 $P_q(\tau)$ は、2つの独立した変数 τ と q の関数ではなく、ただ1つのスケールされたパラメータ $\tau/\bar{\tau}$ によっている。つまり q の違いは、平均間隔 $\bar{\tau} \equiv \bar{\tau}_q$ の中に含まれる。このスケールリングは重要である。これによって、我々は、希に起こる現象つまり大きな q の確率密度関数 $P_q(\tau)$ を、頻繁に起こり統計性の良い現象つまり小さな q の確率密度関数 $P_q(\tau)$ から推測することができる。
- (ii) また、この関数形は、我々が解析した時系列について等しいというユニバサリティを示す。
- (iii) さらに、小さい(大きい)の間隔の後は小さい(大きい)間隔が続き、この間隔にも長期記憶が存在する。このボラティリティの間隔のクラスタリングは新しい現象で、よく知られ

ているボラティリティ自身の長期記憶と関連している。

また、リスクは、ファイナンス分野ではバリュアット・リスク、地震では残余時間などそれぞれの分野で個別に違った表現でなされているが、ここでは、このスケールリングを用いてバリュアット・リスクを推測する方法を示す。

2 金融時系列

金融時系列で、 $i-1$ 日の価格と i の価格の差、 $\Delta p_i \equiv p_i - p_{i-1}$, は相関がないことがよく知られているが、一方、その絶対値(ボラティリティにはいくつかの定義があるが、これもボラティリティの1つ)は長期記憶を持ち相関があることがよく知られている。さらに、 Δp_i の確率密度関数が $\zeta \approx 3$ であるべき分布 [6], $\Phi(\Delta p) \sim (\Delta p)^{-(\zeta+1)}$ に従うことは金融時系列のユニバサリティとして有名である。[7, 8, 9] また暴落が起きた後 t 日間で、 $|\Delta p_i|$ が敷居値 q を超える日の数 $n_q(t)$ はべき乗分布 $n_q(t) \sim t^{-p}$ ($p \approx 1$) をしており、[10], 地震における大森法則と似ているという研究がある。また、引き続いた下落の幅や下落の底までの価格差については研究があるが、[11] ボラティリティがある敷居値 q を超える日の間隔については十分な研究がない。

3 方法

我々はこれを調べるため、代表的な7つの銘柄の株式価格と7種類の外国為替レートを選び日次のデータ (<http://finance.yahoo.com> および <http://www.federalreserve>) を解析した。[12] ここで、ボラティリティ $|\Delta p_i|$ を標準偏差 $(\langle |\Delta p_i|^2 \rangle - \langle |\Delta p_i| \rangle^2)^{1/2}$ で標準化したので、敷居値 q は、標準偏差の倍数を表す。日次のデータを解析することによる意味のない離散数の影響を避けるため、 $\tau > 3$ となる q のみを扱った。我々は、まず

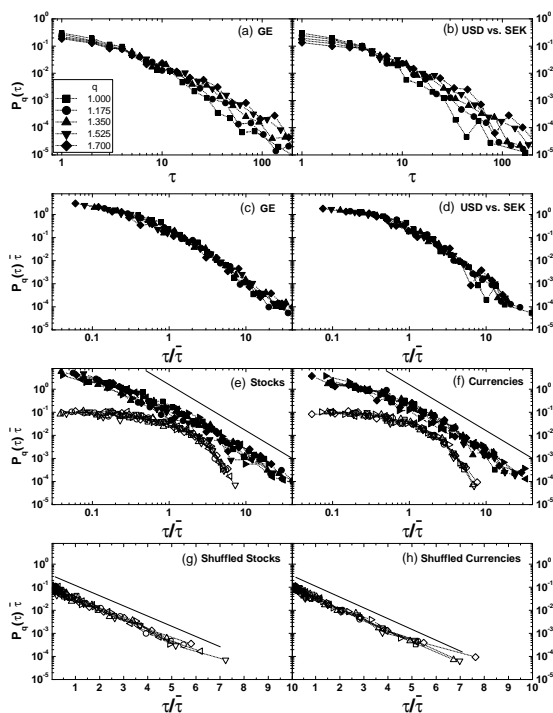


Figure 2: 5つの閾値 q についてボラティリティの時間間隔 τ の確率密度関数 $P_q(\tau)$ 。(a) は典型的な株, General Electric (GE) と (b) は典型的な通貨交換比率 USD vs. Swedish Krona (SEK) を表す。図 (c) と (d) は $\tau/\bar{\tau}$ に対してスケールされた $\bar{\tau}P_q(\tau)$ を示す。図 (e) と (f) は 各株や通貨についてスケールしたものを表す。(e) は7つの株 (S&P 500 ■, IBM ●, DuPont ▲, AT&T ▼, Kodak ◆, GE ◀, and Coca-Cola ▶) を表す。(f) は7つの通貨 (USD vs. JPY ■, UK Pound vs. Swiss Franc ●, USD vs. Swedish Krona ▲, Danish Krone vs. Australian Dollar ▼, Danish Krone vs. Norwegian Krone ◆, USD vs. Canadian Dollar ◀, and USD vs. South African Dollar ▶) を表す。中ぬきのマークはシャッフルされ長期記憶を失った時系列の値を見やすくするために10分の1にしたものを示す。シャッフルされたボラティリティの間隔がポアソン分布に従っていることを確かめるため、片logのスケールで (g) と (h) にプロットした。

最初に、確率密度関数 $P_q(\tau)$ を解析し、それがいかに敷居値 q によっているか調べることから始めた。[Figs. 2(a)、2(b)]. 異なる敷居値 q では確率密度関数も異なり、無相関のデータで期待されるポアソン分布とも異なっている。 q 依存性を調べるため、図 2(c) と 2(d) に、スケールされた確率密度関数 $P_q(\tau)\bar{\tau}$ をスケールされた間隔 $\tau/\bar{\tau}$ の関数として示す。曲線が1本に重なることは、スケーリングの関係

$$P_q(\tau) = \frac{1}{\bar{\tau}} f\left(\frac{\tau}{\bar{\tau}}\right). \quad (2)$$

を示す。スケーリング関数 $f(x)$ が q によらず、 $\bar{\tau} \equiv \bar{\tau}_q$ にのみよっているのが明らかにわかる。もし、 $P_q(\tau)$ が、ある1つの q で知られたなら、Eq. (2) は、他の q の値—特に非常に大きな q (希な現象: 通常それらの現象はデータの数が少ないため解析が難しいが) の 確率密度関数 を知ることができる。

また、我々が調べた7つの株 [Fig. 2(e)] と7つの通貨 [Fig. 2(f)] について、スケールされた関数 $f(x)$ は、異なる銘柄の時系列の間でよく似た「伸ばされた指数関数」の形に近似される。[4] これは、スケールされた関数が株と通貨についてユニバーサルな性質を持つことを示す。

相関のない時系列に関しては、間隔 τ はポアソン分布に $f(x) \propto e^{-x}$ を示すと期待される。これを試すために、ボラティリティの時系列をシャッフルすることによって、長期記憶を取り除き、簡単な指数関数を得た。(Fig. 2(g), (h)) シャッフルされたデータに比べてもとの時系列の 確率密度関数 は、非常に小さな間隔と非常に大きな間隔で、頻度が高いことがわかる。(Fig. 2(e), (f))

4 ボラティリティの間隔系列の記憶

次に、我々は分布関数 $P_q(\tau)$ が、ボラティリティの間隔の系列を完全に特徴付けるかどうか試す。つまり、間隔の系列に相関があるかどうか調べた。

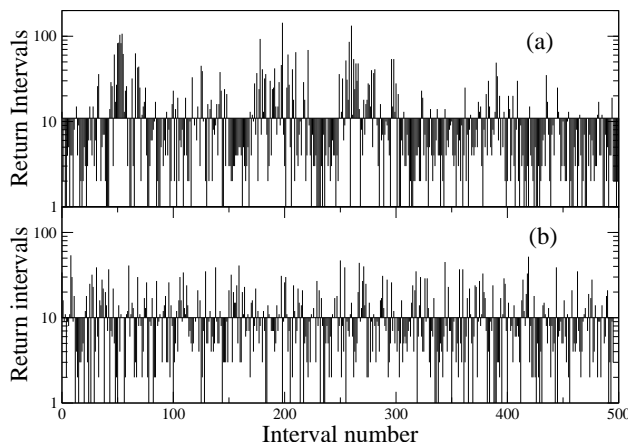


Figure 3: ボラティリティの間隔のクラスタリングの視覚的説明。(a)は1984–2004(約5000日)のIBMのボラティリティの間隔を示す。ここで $q = 1.5$ 、平均間隔は10日である。(b)は同じものを、シャッフルしたボラティリティについて示した。

もし相関がないなら、分布関数 $P_q(\tau)$ を用いランダムに選んだ τ によって間隔の系列は再現される。Fig. 3(a) は、典型的な株価 IBM の $q = 1.5$ の間隔系列を示し、Fig. 3(b) は、そのシャッフルしたボラティリティの間隔系列を表す。Fig. 3(a) と (b) は全く異なって見える。Fig. 3(a) では、その平均値の上および下で一続きのパッチが見られるが、シャッフルしたデータでは見られない。つまり、これは、短い間隔 (平均以下) の後には、短い間隔が、長い間隔 (平均以上) の後には、長い間隔が続くことを示す。この効果を定量化するために、間隔 τ の条件付平均間隔 $\hat{\tau}(\tau_0)$ を調べた。ここで、 τ_0 は τ のひとつ前の間隔を表す。Fig. 4(a), (b) は、S&P500 インデックスと IBM の株価 Fig. 4(c), (d) は、円とドル (US)、クロネ (スウェーデン) とドル (US) の為替交換比率についての条件付平均間隔を表す。中塗りのマークがボラティリティの条件付平均間隔、中ぬきのマークがシャッフルしたボラティリティの条件付

平均間隔を表す。ある間隔とその1つ前の間隔に平均的に正の相関があることがわかる。

5 リスクの推測

次にリスクの推測への応用を考える。[13] ファイナンスの分野で、リスクの指標として広く使われているバリュー・アット・リスクは、ある時間スケール τ に対する価格変化の確率密度関数を P_τ とすると、与えられた損失確率 p_0 でおきる下落 q で定義される。

$$\int_{-\infty}^{-q} p_\tau(x) dx = p_0 = \frac{1}{\bar{\tau}}$$

これは幅 q 以上の下落が起きる間隔の平均 $\bar{\tau}$ の逆数になることが簡単に示される。また、条件付平均間隔 $\hat{\tau}(\tau_0)$ についての同様に

$$\int_{-\infty}^{-q} p_\tau(x|\tau_0) dx = p_0 = \frac{1}{\hat{\tau}(\tau_0)}$$

が成り立つ。したがって、 $\hat{\tau}(\tau_0)$ をスケーリングによって推測することによりダイナミックなリスクの予測が可能になる。つまり、1つ前の間隔が τ_0 であった時の $\hat{\tau}(\tau_0)$ に相当する q がリスクとなる。

6 結論

株式市場や外国為替市場の日次データについてボラティリティの間隔を調べ、次のような結果を得た。

- (i) 間隔の確率密度関数 $P_q(\tau)$ は、パラメータ $\tau/\bar{\tau}$ でスケールされる。このスケーリングによって、希に起こる現象つまり大きな q の確率密度関数 $P_q(\tau)$ を、頻繁に起こり統計性の良い現象つまり小さな q の確率密度関数 $P_q(\tau)$ から推測することができる。

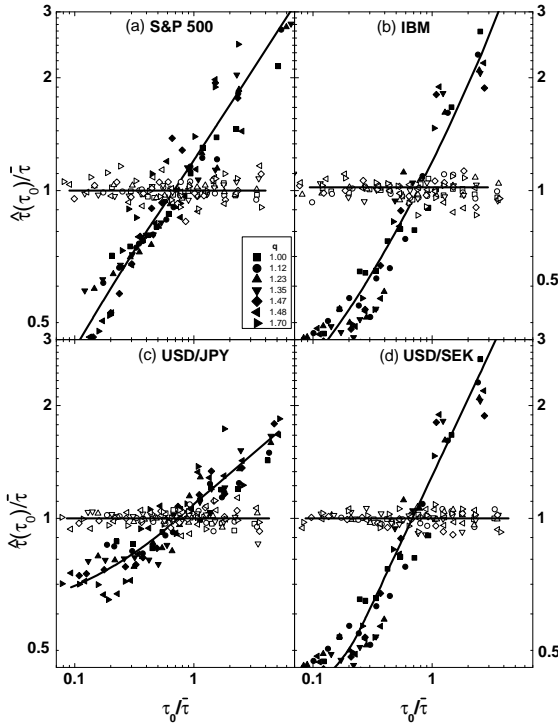


Figure 4: $\bar{\tau}$ で割った条件付平均値 $\hat{\tau}(\tau_0)$ を $\tau_0/\bar{\tau}$ に対して示す。(a) は S&P インデックス, (b) は IBM, (c) は USD/JPY (d) は USD/SEK。記憶のない時系列については、シャッフルされた時系列 (中ぬきのマーク) のように $\hat{\tau}(\tau_0)/\bar{\tau} \equiv 1$ であることが期待される。

(ii) また、この関数形は、我々が解析した金融時系列について皆等しいというユニバサリティを示す。

(iii) この間隔自体にも長期記憶が存在する。このボラティリティの間隔のクラスタリングは新しい現象で、よく知られているボラティリティ自身の長期記憶と関連している。

これらの結果をリスクの推測に用いることができる。

異常値の統計的性質を、頻度の大きい現象からスケールングにより推測するという方法は、従来の研究にはなく、リスクの推測などの応用が期待される。[12],[13],[14] また、これらの現象の理論やフラクタリティ、マルチフラクタリティとの関係や、極値理論に応用することは、今後の問題である。

References

- [1] The effect of long-term correlations on the return periods of rare events Bunde, A., Eichner, J. F., Havlin, S. and Kantelhardt, W., Physica A 330, 1–7. (2003)
- [2] Return intervals of rare events in records with long-term persistence Bunde, A., Eichner, J. F., Havlin, S. and Kantelhardt, W., Physica A 342, 308–314. (2004)
- [3] Recurrence intervals between earthquakes strongly depend on history, Livina, V., Tuzov, S., Havlin, S. and Bunde, A. Physica A 348:591–595. (2005)
- [4] Long-Term Memory: A Natural Mechanism for the Clustering of Extreme Events and Anomalous Residual Times in Climate Records, Bunde, A., Eichner, J. F., Kantelhardt, W. and Havlin, S. (2005) Phys. Rev. Lett.99, 048201.

- [5] Long-Term Clustering, Scaling, and Universality in the Temporal Occurrence of Earthquakes, Corral, A. *Phys. Rev. Lett.* **92**:108501. (2004)
- [6] Mandelbrot, B. B. (1963) *J. Business* **36**, 394–419.
- [7] Liu, Y., Gopikrishnan, P., Cizeau, P., Meyer, M. Peng, C. & Stanley, H. E. (1999) *Phys. Rev. E* **60**, 1390–1400.
- [8] Gopikrishnan, P., Plerou, V., Amaral, L. A. N., Meyer, M., & Stanley, H. E. (1999) *Phys. Rev. E* **60**, 5305–5315.
- [9] Mantegna, R. & Stanley, H. E. (2000) *Introduction to Econophysics: Correlations & Complexity in Finance* (Cambridge University Press, Cambridge).
- [10] Lillo, F. & Mantegna, R. N. (2003) *Phys. Rev. E* **68**, 016119.
- [11] Bouchaud, J.-P. & Potters, M. (2003) *Theory of Financial Risk and Derivative Pricing: From Statistical Physics to Risk Management* (Cambridge University Press, Cambridge).
- [12] Scaling and Memory in Volatility Return Intervals in Financial Market, Yamasaki, K., Muchnik, L., Havlin, S., Bunde, A. and Stanley, H.E. *Pro.Natl.Aad.Si.*102,942. (2005)
- [13] Scaling and Memory in Return Loss Intervals: Application to Risk Estimation Yamasaki, K., Muchnik, L., Havlin, S., Bunde, A. and Stanley, H.E. *Pratial Fruits of Eonphysics*, edited by H.Takayasu, in press
- [14] Scaling and memory of intraday volatility in return intervals in stock market Wang, F., Yamasaki, K., Havlin, S. and Stanley, H.E. submitted to PRE