遅れつき一階微分方程式の楕円関数解

長谷部 勝也（愛知大経営）中山章宏（琉球大理）
杉山雄規（名大院情報）

1　Ablowitz-Ladik 微分差分方程式

初期の交通流研究にはしばしば現れる時間遅れを持つ連立微分方程式

$$\frac{d}{dt}x_n(t+\tau) = f(x_{n+1}(t) - x_n(t)) \tag{1}$$

において関数を $f = \tanh$ と選ぶと楕円関数による二種類の解析解がある。それを最初に述べたのは五十嵐達の研究グループである。

我々はこれに加えて第三の解があることを発見したのでここに報告する。(1) において若干の変形の後 Ablowitz-Ladik 微分差分方程式が現れる。その事情は次の通りである。$h_n(t) = x_{n+1}(t) - x_n(t)$ を導入し方程式 (1) を

$$\frac{d}{dt}h_n(t+\tau) = f(h_{n+1}(t)) - f(h_n(t)) \tag{2}$$

と書き改める。適切な運動座標系に乗ると静止解が得られると想定する。即ち独立変数を時刻 t から $u = n + vt$ に変更する。n は自動車に付けられた番号であるから離散値の筈だが若干の飛躍を許して u を連続変数と見なす。変数

$$H(u) = H(n+vt) = h_n(t) \tag{3}$$

の導入によって

$$v\frac{d}{du}H(u+v\tau) = f(H(u+1)) - f(H(u)) \tag{4}$$

が得られる。右辺の形を整えるために $u \to u - 1/2$ と置き換えて

$$v\frac{d}{du}H(u+v\tau-\frac{1}{2}) = f(H(u+\frac{1}{2})) - f(H(u-\frac{1}{2})) \tag{5}$$

を得るがここで運動座標系の速度を $v\tau - \frac{1}{2} = 0$ を満たすように調整し、最後に未知変数を $G = f(H)$ に変更して

$$v\frac{dG(u)/du}{1-G(u)^2} = G(u+\frac{1}{2}) - G(u-\frac{1}{2}) \tag{6}$$

を得る。これが Ablowitz-Ladik 微分差分方程式である。遅れ付きの微分方程式の取扱いは一般に厄介であるが今の場合、問題を定常解に限定し、自動車の番号を独立変数にとり、運動座標系に乗ることによって見掛け上遅れを消すことができた。

さてここで

$$G(u) = g(\alpha u) = g(t) \quad t = \alpha u \tag{7}$$

として (6) を

$$\alpha v \frac{dg(t)/dt}{1 - g(t)^2} = g(t + \frac{\alpha}{2}) - g(t - \frac{\alpha}{2}) \tag{8}$$

と書き直し更に

$$1 - \alpha v \frac{dg(t)/dt}{g(t + \frac{\alpha}{2}) - g(t - \frac{\alpha}{2})} = g(t)^2 \tag{9}$$

と変形しておく。左辺が $g(t)$ の一次変換

$$g(t) \to \beta g(t) + \gamma \tag{10}$$

に対して不変であることに注意。だから方程式 (9) は

$$1 - \alpha v \frac{dg(t)/dt}{g(t + \frac{\alpha}{2}) - g(t - \frac{\alpha}{2})} = (\beta g(t) + \gamma)^2 \tag{11}$$

と書くことができる。解の候補 $g(t)$ が与えられたときパラメータ α, β, γ を適当に調節して (11) が成り立てば $G(u) = \beta g(\alpha u) + \gamma$ は解である。

2　第1の解と第2の解

五十嵐達の結果をここで述べた形式に翻訳すると彼等の解は次の二種類である。

$$g(t) = \mathrm{sn}(t) \tag{12}$$

$$g(t) = \frac{\mathrm{sn}(t+a) + \mathrm{sn}(t-a)}{\mathrm{sn(t)}} = \frac{2cd}{1 - k^2 s^2 \mathrm{sn(t)}^2} \tag{13}$$

但し (13) において a は定数 k はモジュライであり、$s = \mathrm{sn}(a)$, $c = \mathrm{cn}(a)$, $d = \mathrm{dn}(a)$ と略記している。

$g(t) = \mathrm{sn}(t)$ が如何にして解となるかを調べるのは教訓的である。この時 (11) は

$$\frac{\alpha v k^2 s^2 \mathrm{sn}^2(t) - \alpha v + 2s}{2s} = (\beta \mathrm{sn}(t) + \gamma)^2 \tag{14}$$

である。但しここでは $s = \mathrm{sn}(\alpha/2)$ である。(14) は $x = \mathrm{sn}(t)$ について以下の恒等式と等価である。

$$\frac{\alpha v k^2 s^2 x^2 - \alpha v + 2s}{2s} = (\beta x + \gamma)^2 \tag{15}$$

解は明らかに

$$-\alpha v + 2s = 0 \ , \gamma = 0 \ , \frac{1}{2}\alpha v k^2 s = \beta^2 \tag{16}$$

によって得られる。

それでは (13) が何故解となるのだろうか。解の候補

$$g(t) = \frac{1}{\mathrm{sn}^2(t) + a} = \frac{1}{x + a} \tag{17}$$

を調べよう。但し $x = \mathrm{sn}^2(t)$ である。(11) は x についての以下の恒等式を導く。

$$\frac{Ax^2 + 2Bx + C}{2cds(x+a)^2} = (\frac{\beta}{x+a} + \gamma)^2 \tag{18}$$

但し係数 A, B, C は $s = \mathrm{sn}(\alpha/2)$, $c = \mathrm{cn}(\alpha/2)$, $d = \mathrm{dn}(\alpha/2)$ によって、

$$\begin{aligned}
A &= 2cds - \alpha v(k^2 s^2 a - 1)^2 && (19)\\
B &= 2cdsa + \alpha v\{k^2 s^2 a^2 - (k^2 s^4 - 2k^2 s^2 + 2s^2 + 1)a + s\} && (20)\\
C &= 2cdsa^2 - \alpha v(a + s^2)^2 && (21)
\end{aligned}$$

と表される。(18) の左右両辺に共通の分母 $(x+a)^2$ が現れ問題が著しく簡単になる。通分すると

$$Ax^2 + 2Bx + C = 2cds(\beta + \gamma(x+a))^2 \tag{22}$$

が得られる。これが恒等式であるには左辺が完全平方に書かれる必要がある。即ち

$$B^2 - AC = 0 \tag{23}$$

$B^2 - AC$ は α の二次式である。

$$B^2 - AC = \zeta\alpha^2 + 2\eta\alpha + \lambda \tag{24}$$

従って $\eta^2 - \zeta\lambda \geq 0$ であれば (23) は解を持つ。その場合は β ,γ を調整することによって (18) を恒等式とすることができる。即ち与えられた a に対して α ,β ,γ を調節すれば

$$G(u) = \frac{\beta}{\mathrm{sn}^2(\alpha u) + a} + \gamma \tag{25}$$

は解となる。

3　第3の解

我々は

$$g(t) = \frac{1}{\mathrm{sn}(t) + a} \tag{26}$$

も又解となることを発見した。

(26) を (11) に代入する。 $x = \mathrm{sn}(t)$ として

$$\frac{Ax^2 + 2Bx + C}{2s(x+a)^2} = (\frac{\beta}{x+a} + \gamma)^2 \tag{27}$$

を得る。但し s , c , d を直前の定義とし

$$A = 2s + \alpha v(k^2 s^2 a^2 - 1) \tag{28}$$

$$B = 2(2s - \alpha vcd)a \tag{29}$$

$$C = 2sa - \alpha v(a - s) \tag{30}$$

である。左右両辺に共通分母 $(x+a)^2$ が現れるのは直前の場合と同じである。通分すると

$$Ax^2 + 2Bx + C = 2s(\beta + \gamma(x+a))^2 \tag{31}$$

となり第2の解の場合と全く同じ論理が成り立つ。

第1の解の場合、候補を $g = \mathrm{cn}(t)$ 或は $g = \mathrm{dn}(t)$ 等としても同じく解であることはすぐに分かる。即ち第1の解は或る種のファミリーを形成する。同様に第3の解も

$$g(t) = \frac{1}{\mathrm{cn}(t) + a} \quad g(t) = \frac{1}{\mathrm{dn}(t) + a} \tag{32}$$

等のファミリーを作る。しかし第2の解はファミリーを形成しない。それは恒等式

$$\mathrm{sn}^2(t) + \mathrm{cn}^2(t) = 1 \quad \mathrm{dn}^2(t) + k^2\mathrm{sn}^2(t) = 1 \tag{33}$$

があるので

$$\frac{1}{\mathrm{cn}^2(t) + a} = \frac{-1}{\mathrm{sn}^2(t) - (a+1)} \tag{34}$$

の様に結局同じ解の候補に戻るからである。

参考文献

[1] Y.Igarashi, K.Itoh, K.Nakanishi, J. Phys. Soc. Jpn. **68**, (1999) 791

[2] M.J.Ablowitz, J.F.Ladik, J. Math. Phys. **17** (1976) 1011

[3] K.Hasebe, A.Nakayama, Y.Sugiyama, Phys. Letters. A**259** (1999) 135